BANQUE D’ÉPREUVES DUT-BTS
-SESSION 2018-

É P R E U V E DE

MATHÉMATIQUES

CODE ÉPREUVE : 967

L’usage de calculatrice est interdit.

A v e r t i s s e m e n t :

Tous les candidats doivent traiter les questions de 1 à 9.

Les questions 10, 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l’option génie électrique.

Les questions 13 et 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie civil et génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à l’option du candidat ne seront pas corrigées.

DURÉE DE L’EPREUVE: 2H00

Question 1

On considère les suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n\sqrt{3} \\ v_{n+1} = u_n\sqrt{3} + v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n + \mathrm{i}v_n$.

(A) Pour tout entier naturel n, on a $w_{n+1} = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})\,w_n$.
(B) Pour tout entier naturel n, on a $|w_{n+1}| = 2|w_n|$.
(C) Pour tout entier naturel n, on a $w_n = 2^n e^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{3}}$.
(D) w_n est un réel positif si et seulement si n est multiple de 6.
(E) On a $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Question 2

On définit le jeu suivant. On commence par lancer une pièce de monnaie donnant **pile** ou **face** avec une probabilité 1/2 à chaque fois. Ensuite, si le résultat du lancer de la pièce est **pile**, on lance un seul dé donnant un résultat de 1 à 6 de manière équiprobable, tandis que si le résultat est **face** on lance deux dés donnant chacun un résultat de 1 à 6 de manière équiprobable, et l'on fait la somme des points des résultats des deux dés. Les différents tirages et lancers sont indépendants.

Le résultat d'une telle expérience est le couple (L, D), L valant **pile** ou **face**, D donnant le résultat du lancer de dés (un ou deux selon le cas), ce résultat allant de 1 à 12. Le gain final est la valeur de D.

(A) La probabilité que D vaille 12 est 1/12.
(B) Sachant que D vaut 1, la probabilité que L vaille **pile** est 1/2.
(C) La probabilité que D soit un nombre pair est 1/2.
(D) La probabilité que D vaille 2 est 7/72.
(E) La probabilité que D vaille 7 est 1/6.

Question 3

Suite de la question précédente avec les mêmes notations.

(A) Sachant que D vaut 2, la probabilité que L vaille **pile** est 6/7.
(B) À ce jeu, la probabilité de gagner strictement plus de 6 est 1/2.
(C) Sachant que D vaut 8, la probabilité que L vaille **face** est 1.
(D) Le gain final a une espérance inférieure à 3/2.
(E) L'espérance du gain final est 21/4.

Question 4

On considère l'équation différentielle suivante

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{H}$$

(A) L'équation différentielle (H) est linéaire à coefficients constants.
(B) Toutes les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto e^{rt}$ et sont obtenues en prenant pour r les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$.
(C) Les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto (At + B)e^t$, où A et B sont des constantes.
(D) L'unique solution de (H) qui tend vers 0 en $+\infty$ est la fonction nulle.
(E) Il n'existe pas de fonction f solution de (H) telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Question 5

On considère l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 6te^t. \tag{E}$$

On notera que l'équation différentielle homogène associée à (E) est l'équation différentielle (H) étudiée à la question précédente.

(A) La fonction nulle est solution de (E).
(B) Une solution particulière de (E) est $t \mapsto te^t$.
(C) Une solution particulière de (E) est $t \mapsto t^3e^t$.
(D) Il n'existe pas de solution de (E) nulle en 0.
(E) Il existe une unique solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Question 6

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par par $f(x) = xe^{\frac{x+1}{x}}$.

(A) Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de e^{1+u} est

$$e^{1+u} = 1 + (1+u) + \frac{(1+u)^2}{2!} + \frac{(1+u)^3}{3!} + (1+u)^3\varepsilon(u)$$

où ε est une fonction de limite nulle en 0.

(B) On a l'équivalence suivante :

$$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} e\left(x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

(C) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
(D) La courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ex + e$ au voisinage de $+\infty$.
(E) La courbe représentative de f se situe en-dessous de son asymptote oblique en $+\infty$.

Question 7

On définit une fonction $g\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{2t}{(t+1)(t+2)(t+3)}$.

(A) L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(B) Pour tout réel positif t, on a $g(t) = \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{4}{t+2} + \dfrac{3}{t+3}$.

(C) La fonction $G\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $G(t) = \ln\left(\dfrac{(t+2)^4}{(t+1)(t+3)^3}\right)$ est une primitive de g.

(D) On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

(E) Pour tout entier naturel n, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} + \frac{3}{n+3}$.

Question 8

On se donne trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}, \qquad w_n = v_n - u_n.$$

(A) On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(B) La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des valeurs absolues de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

(C) La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

(D) La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge et sa somme s est telle que $-1 \leq s \leq \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

(E) La série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{\sqrt{2p-1} - \sqrt{2p}}{\sqrt{2p(2p-1)}}$ converge et a même somme que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Question 9

Suite de la question précédente avec les mêmes notations.

(A) On a $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

(B) La suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des valeurs absolues de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(C) Les $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positifs pour n pair et négatifs pour n impair.

(D) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente en $+\infty$ à la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(E) La série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge.

Les questions 10, 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13, 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie mécanique et génie civil.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

Question 10

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

Soit la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

(A) Pour tout réel x, on a $\sin x + \cos x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
(B) Le domaine de définition de h est $\mathbb{R}$.
(C) On a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}y}{\cos y}$.
(D) À l'aide du changement de variables $z = \sin y$, on trouve $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}$.
(E) On a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$.

Question 11

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

On considère la fonction 2π-périodique f, paire, définie sur $[0,\pi]$ par $f(t) = \sin(2t)$. On va calculer son développement en série de Fourier

$$Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$$

et en étudier quelques propriétés.

(A) On a $a_0 = 0$.
(B) Pour tout réel t, on a $f(t) = Sf(t)$.
(C) Pour tous réels a et b, on a $\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.
(D) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $a_{2p} = 0$.
(E) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $a_{2p+1} = \dfrac{8}{\pi\left((2p+1)^2 - 4\right)}$.

Question 12

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

Suite de la question précédente avec les mêmes notations.

(A) On a $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{8}{\pi\left((2p+1)^2-4\right)} = \frac{\pi^2}{6}$.

(B) On a $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{8}{\left((2p+1)^2-4\right)} = \frac{8}{3}$.

(C) La relation de Parseval s'écrit ici $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$.

(D) En calculant l'intégrale, on trouve $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

(E) On a $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{64}{\left((2p+1)^2-4\right)^2} = \frac{\pi^2}{2}$.

Question 13

Seulement pour les candidats des options génie mécanique et génie civil.

Dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \cos^4 t \\ y(t) = \sin^4 t \end{cases}, \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $t \in]0,\pi/2[$, on note T_t la droite tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(x(t), y(t))$. On note P_t l'intersection de T_t avec l'axe (Ox), et Q_t l'intersection de T_t avec l'axe (Oy).

(A) La courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

(B) Pour tout $t \in]0,\pi/2[$, le vecteur de composantes $(-\cos^2 t, \sin^2 t)$ est un vecteur directeur de T_t.

(C) Pour tout $t \in]0,\pi/2[$, une équation de T_t est $x\sin^2 t + y\cos^2 t = \sin^2 t\cos^2 t$.

(D) Pour tout $t \in]0,\pi/2[$, on a $OP_t + OQ_t = 1$.

(E) Pour tout $t \in]0,\pi/2[$, la longueur du segment P_tQ_t est égale à 1.

Question 14

Seulement pour les candidats des options génie mécanique et génie civil.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni de la base $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit l'application linéaire f de matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$. On note $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(A) La matrice $\boldsymbol{A}$ est de rang 3.
(B) Le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$ est 0.
(C) L'équation $\boldsymbol{AX} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ admet pour unique solution $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(D) $\vec{\jmath} - \vec{k}$ est un vecteur propre de f.
(E) La matrice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} + \alpha \boldsymbol{A}$ est inversible si et seulement si $\alpha \neq \dfrac{-1}{3}$, où $\boldsymbol{I}$ est la matrice de l'application identité.

Question 15

Seulement pour les candidats des options génie mécanique et génie civil.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on se donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$. On note $\vec{a} \cdot \vec{b}$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et on note $\vec{a} \wedge \vec{b}$ leur produit vectoriel.

(A) Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.
(B) L'équation $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ de l'inconnue $\vec{x}$ a une unique solution de composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
(C) Pour tout vecteur $\vec{x}$, on a $(\vec{u} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{v})$.
(D) On a $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{x}$ appartient au plan vectoriel contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(E) On a $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
