BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS
-SESSION 2017-

É P R E U V E DE

MATHÉMATIQUES

CODE ÉPREUVE : 967

L'usage de calculatrice est interdit.

A v e r t i s s e m e n t :

Tous les candidats doivent traiter les questions de 1 à 9.

Les questions 10, 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie civil et génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à l'option du candidat ne seront pas corrigées.

DURÉE DE L'EPREUVE: 2H00

Question 1

On considère les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad g(x) = \arcsin\left(f(x)\right) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

(A) La dérivée de f est donnée par $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ pour tout x réel.

(B) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

(C) La dérivée de arcsin sur $]-1\,;1[$ est donnée par

$$\arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

(D) Pour tout x réel, $g'(x) = \arctan'(x)$.

(E) Pour tout x réel, $g(x) = \arctan(x) + \dfrac{\pi}{4}$.

Question 2

On note $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout x réel, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On souhaite étudier la courbe représentative de f au voisinage de 0 grâce à un développement limité de $f(x)$ en 0. La notation ε représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

(A) Le développement limité à l'ordre 3 de $e^x - 1$ au voisinage de 0 est

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

(B) f est continue en 0.

(C) Le développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 est

$$\frac{1}{1+u} = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(u).$$

(D) Le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0 est

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2\varepsilon(x).$$

(E) La courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

Question 3

On se propose de calculer les intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\tan x)\,\mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x, \qquad K = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

(A) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ diverge.
(B) On a $I = J - K$.
(C) En effectuant le changement de variable $t = \tan x$, on obtient $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
(D) Une primitive de $\dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est $\arctan(\ln t)$.
(E) À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$, on trouve $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Question 4

Cette question fait suite à la précédente, dont on reprendra les notations.

(A) On a $I = 0$.
(B) On a $J = K$.
(C) On a $J + K = 2J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\left(2x\right)\right)\mathrm{d}x$.
(D) On a $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\sin x\right)\mathrm{d}x = 2J$.
(E) On a $J = K = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.

Question 5

On considère le polynôme $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ défini par

$$P(z) = z^3 + 3iz^2 + (4i - 9)z - 15i.$$

Le polynôme P admet une unique racine réelle notée a, et on admet que P se factorise de la manière suivante :

$$P(z) = (z - a)R(z), \qquad \text{avec } R(z) = z^2 + 3(i-1)z - 5i.$$

On note r_1 et r_2 les deux racines complexes de R.

(A) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la partie réelle de $P(z)$ est $z^3 - 9z$.
(B) L'unique racine réelle de P est $a = 3$.
(C) Le discriminant de $R(z)$ est $\Delta = 2i$.
(D) Les racines carrées de Δ sont $\pm(1+i)$.
(E) On a $r_1 = 1 - 2i$ et $r_2 = 2 - i$.

Question 6

On considère les deux équations différentielles linéaires, où la variable est $x \in \mathbb{R}$, et la fonction inconnue $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$3y'(x) + xy(x) = 0, \tag{H}$$
$$3y'(x) + xy(x) = x^3. \tag{S}$$

Les solutions de l'équation (H) sont de la forme $y(x) = Af(x)$, où $A \in \mathbb{R}$ et f est une fonction à déterminer vérifiant $f(0) = 1$.

On cherchera ensuite une solution particulière de (S) sous la forme $y_0(x) = A_0(x)f(x)$, où A est une fonction dérivable telle que $A_0(0) = 0$.

(A) On a $f(x) = e^{-x^2/6}$.

(B) On a $A_0'(x) = x^3 e^{-x^2/6}$.

(C) En effectuant le changement de variable $u = t^2/6$ dans l'égalité $A_0(x) = \displaystyle\int_0^x A_0'(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient $A_0(x) = \displaystyle\int_0^{x^2/6} ue^u\,\mathrm{d}u$.

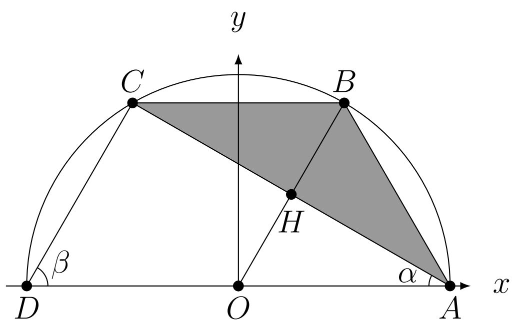
(D) On a
$$\int_0^{x^2/6} ue^u\,\mathrm{d}u = 1 + \left(\frac{x^2}{6} - 1\right) e^{x^2/6}.$$

(E) La solution y_1 de l'équation (S) qui s'annule en 0 est $y_1(x) = x^2 - 6 + 6e^{-x^2/6}$.

Question 7

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le demi-cercle supérieur de centre O, de rayon r, et les points $A = (r, 0)$, $D = (-r, 0)$. Les points B et C sont sur le demi-cercle de sorte que le polygone $ABCD$ soit la moitié supérieure d'un hexagone régulier, c'est-à-dire $AB = BC = CD = r$. On appelle H l'intersection des droites (AC) et (BO). Dans le triangle ACD, on note α l'angle en A et β l'angle en D.

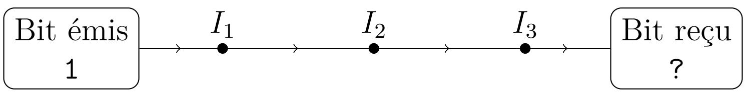
On suppose que la surface du demi-disque de rayon r est égale à $1/2$. On veut déterminer la surface S du triangle ABC, grisée sur la figure suivante.



(A) On a $\cos(\alpha) = \sqrt{3}/2$.
(B) La surface S du triangle ABC vaut $AC \times BH$.
(C) On a $AC = 2r\cos(\alpha) = r$.
(D) On a $r = 1/\sqrt{\pi}$.
(E) La surface du triangle ABC est $S = \sqrt{3}/\pi$.

Question 8

On étudie la transmission d'un bit (une information binaire de valeur `0` ou `1`) à travers trois relais successifs notés I_1, I_2 et I_3. Un bit de valeur `1` est envoyé à I_1 qui le transmet à I_2 et ainsi de suite. Les relais I_1, I_2 et I_3 ne sont pas fiables : ils peuvent se tromper de manière indépendante. On fait l'hypothèse que chacun renvoie l'information qu'il reçoit du relais précédent avec la probabilité $4/5$ et l'information contraire avec la probabilité $1/5$. Ainsi, deux erreurs successives se neutralisent.



Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$ on note E_k l'évènement « I_k transmet un bit de valeur `1` » et $p_k = P(E_k)$. De plus, on pose $p_0 = 1$. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de relais qui transmettent un bit de valeur `1`.

(A) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{4}{5}$.
(B) Pour tout $k \in \{2, 3\}$, on a $P(E_k \mid E_{k-1}) = \dfrac{4}{5}$.
(C) $P(E_1 \mid E_2) = \dfrac{15}{16}$.
(D) Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $p_k = \dfrac{3}{5}p_{k-1} + \dfrac{1}{5}$.
(E) On a $P(X = 0) = \dfrac{16}{125}$.

Question 9

On considère X la variable aléatoire de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(1+x)^2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où λ est une constante à déterminer pour que f ait les propriétés d'une densité de probabilité. On considère également la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.

(A) On a $\lambda = 2$.

(B) En remarquant que $\dfrac{x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2}$, on a $E(X) = 3\ln(2) - 1$.

(C) Pour $y \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, $P(Y \leq y) = \dfrac{3y}{1+y} - 1$.

(D) X et Y suivent la même loi de probabilité.

(E) $E\left(Y\right) = \dfrac{1}{E\left(X\right)}$.

Les questions 10, 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13, 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie mécanique et génie civil.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

Question 10

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

Dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on associe à chaque nombre complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), le point M d'affixe z et de coordonnées (x, y). Soit l'application $f \colon \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z^2}{i - z}.$$

On considère l'ensemble $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$ des points du plan affixes de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, i\}$ tels que $|f(z)| = |z|$, ainsi que l'ensemble $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}$ des points d'affixes $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

(A) L'ensemble $\mathscr{D}$ est constitué des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = |z - i|$.

(B) L'ensemble $\mathscr{D}$ est un cercle.

(C) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}$, la partie réelle de $f(x + iy)$ est

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = -\frac{x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}.$$

(D) L'ensemble $\mathscr{E}$ est l'union d'un cercle et d'une droite privée du point de coordonnées $(0, 1)$.

(E) L'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ est celle du cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon $1/2$.

Question 11

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π, définie par

$$\forall t \in \left]-\pi\,;\pi\right], \qquad f(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

On se propose d'étudier la série de Fourier de f notée

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right).$$

(A) f est continue sur $\mathbb{R}$.
(B) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = S(t)$.
(C) Pour tous réels a et b, on a

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{2}.$$

(D) On a $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$.
(E) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = 0$.

Question 12

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

Cette question fait suite à a précédente, dont on reprendra les notations. On calculera les coefficients de Fourier de f, on évaluera la série $S(t)$ en certaines valeurs de t, puis on appliquera l'égalité de Parseval.

(A) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = \dfrac{-4(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}$.
(B) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.
(C) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 1$.
(D) On a $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
(E) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

Question 13

Seulement pour les candidats des options génie civil et génie mécanique

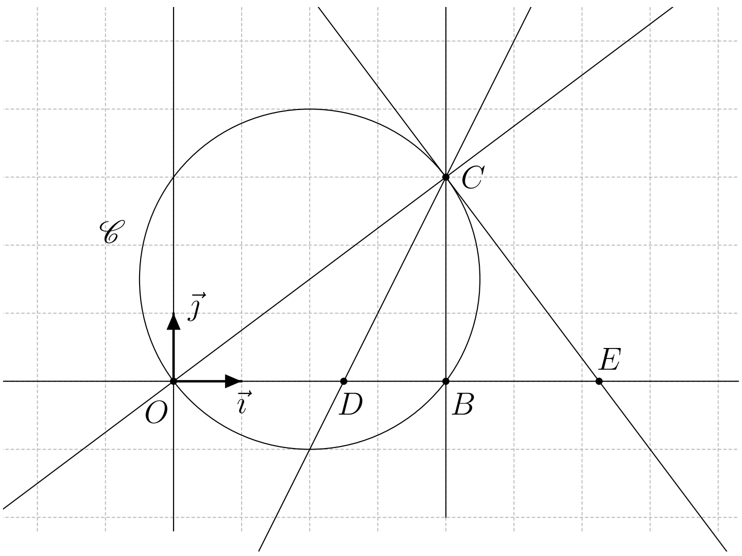
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note I la matrice identité d'ordre 3.

(A) On a $A^2 = 5A + 4I$.
(B) Le scalaire 0 est une valeur propre de A.
(C) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.
(D) Il existe deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n, on ait $A^n = a_nA + b_nI$.
(E) Pour tout n entier naturel non nul, $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$.

Question 14

Seulement pour les candidats des options génie civil et génie mécanique

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $B = (4, 0)$, $C = (4, 3)$ et $D = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Le cercle circonscrit au triangle OBC est noté $\mathscr{C}$ et la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en C coupe la droite (OB) en E.



(A) L'équation $(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ est une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

(B) Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y), la distance de M à la droite (OC) vaut

$$d(M, (OC)) = \frac{|3x + 4y|}{5}.$$

(C) La droite (CD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OCB}$.

(D) La tangente au cercle $\mathscr{C}$ en C a pour équation $4x + 3y = 25$.

(E) Le triangle DCE est isocèle en E.

Question 15

Seulement pour les candidats des options génie civil et génie mécanique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) - \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) + \sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0\,; 2\pi].$$

(A) La courbe Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

(B) Pour tout $t \in [0\,; 2\pi]$,

$$y'(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

(C) Le tableau suivant donne le variations de y sur $[0\,; 2\pi]$.

t	0	$\pi/4$	$5\pi/4$	2π
$y(t)$	1 $\nearrow$	$\sqrt{2}$ $\searrow$	$-\sqrt{2}$ $\nearrow$	1

(D) La tangente à Γ en $t = \frac{\pi}{4}$ est verticale.

(E) La courbe Γ est un cercle.
