BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS
-SESSION 2015-

É P R E U V E DE

M A T H É M A T I Q U E S

CODE ÉPREUVE : 967

L'usage de calculatrice est interdit.

A v e r t i s s e m e n t :

Tous les candidats doivent traiter les questions de 1 à 10.

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

DURÉE DE L'EPREUVE: 2H00

Dans les questions 1 et 2, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = e^{2t^2}\left(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\right),$$

où a, b et ω sont des nombres réels. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. On note D.L. pour développement limité et $\varepsilon(t)$ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

Question 1

(A) On a $f'(0) = a + b\omega$.
(B) Si $f(0) = 0$ alors $a = 0$.
(C) Si $a = 0$, $b = 1$ et $f(1) = 0$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = k\pi$.
(D) Si $f'(0) = 1$ alors $\omega = b$.
(E) Un D.L. de $t \mapsto e^{2t^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $1 + 2t^2 + 2t^4 + t^4\varepsilon(t)$.

Question 2

(A) Un D.L. de $t \mapsto b\sin(\omega t)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $b\omega t - \dfrac{b\omega^3 t^3}{6} + t^4\varepsilon(t)$.
(B) Si $a = 0$ et $b = 1/\omega$ alors un D.L. de $t \mapsto f(t) - t$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 est $\left(2 - \dfrac{\omega^2}{6}\right)t^3 + t^3\varepsilon(t)$.
(C) Si $a = 0$, $b = 1/\pi$ et $\omega = \pi$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ à droite de 0.
(D) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = f(n)$. Si $a = 0$, $b = 1$ et $\omega = \pi$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(E) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = f\left(2n + \dfrac{1}{2}\right)$. Si $a = 0$, $b = 1$ et $\omega = \pi$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Question 3

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1 et k un nombre entier compris entre 0 et n. On note

$$I_{n,k} = \int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}\,\mathrm{d}t.$$

(A) En faisant le changement de variable $u = 1 - t$, on montre que $I_{n,k} = -I_{n,n-k}$.
(B) On a $I_{n,0} = \dfrac{1}{n}$.
(C) En faisant une intégration par partie, on a $I_{n,1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
(D) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I_{n,k} = 1$.
(E) On suppose que $n = 4$. On a $I_{4,2} = 1/30$.

Question 4

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. On note $P(x) = ax^2 + bx + c$. À partir de P, on définit une fonction, notée $J(P)$, par

$$J(P)(x) = \int_0^1 (a\sin^2(\pi y) + b\sin(\pi y)x + cx^2)\,\mathrm{d}y.$$

(A) $J(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
(B) Pour $P(x) = 1$, on a $J(P)(x) = x^2$.
(C) Pour $P(x) = x$, on a $J(P)(x) = \dfrac{2}{\pi}x$.
(D) Pour $P(x) = x^2$, on a $J(P)(x) = 1$.
(E) Pour $P(x) = 2x + 3$, on a $J(P)(x) = \dfrac{4}{\pi}x + 3$.

Question 5

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$. On admet qu'il se factorise sous la forme $P(z) = (z-4)Q(z)$, avec $Q(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, où α, β, γ. sont des réels à déterminer. On note a, b, c les trois racines de P, avec $a \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(b) > 0$. On note (A, B, C) les points du plan d'affixes (a, b, c) dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(A) On a $P(4) = 1$.
(B) On a $Q(z) = z^2 - 2z + 4$.
(C) L'ensemble des racines de $Q(z)$ est $\{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}\}$.
(D) On a $\dfrac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.
(E) Le triangle ABC est équilatéral.

Question 6

On considère le polynôme $R(X) = P(X^2)$. Ses racines sont obtenues en prenant les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres a, b, c. En appariant les paires complexes conjuguées de racines, on obtient une factorisation réelle de la forme :

$$R(X) = (X^2 - 4)(X^2 - uX + v)(X^2 + sX + t), \text{ avec } u, v, s, t \text{ réels strictement positifs.}$$

(A) Pour $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les racines carrées de $re^{i\theta}$ sont de la forme $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$.
(B) Les racines carrées de b sont conjuguées complexes de celles de c.
(C) Les racines carrées de b sont $\pm 2e^{i\pi/6}$.
(D) L'ensemble des racines de R à partie réelle positive est $\left\{2, \dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\right\}$.
(E) On a $u = s = \sqrt{6}$ et $v = t = 2$.

Question 7

Soit un nombre complexe $a = re^{i\alpha}$ de module $r > 1$ et d'argument α réel. Son conjugué est $\overline{a}$, d'inverse $a_1 = \dfrac{1}{\overline{a}} = \dfrac{1}{r}e^{i\alpha}$. On définit la transformation du plan complexe (pour $z \neq a_1$)

$$w = g(z) = \frac{z-a}{\overline{a}z - 1} = \frac{z-a}{\overline{a}(z-a_1)}.$$

Pour un complexe de module unité $u = e^{i\theta}$ on note $g(u) = \rho e^{i\varphi}$ et on calcule ρ en fonction de a, et l'argument φ en fonction de α et $\beta = \arg \dfrac{u-a}{u-a_1}$.

(A) On a $|u-a|^2 = 1 + r^2 - 2\overline{a}u$.
(B) On a $\rho = 1$.
(C) Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$, on a $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.
(D) On a $|\overline{a}u - 1|^2 = (\overline{a}u - 1)(a\overline{u} - 1)$.
(E) L'argument φ vaut $\beta - \alpha$.

Question 8

On suppose ici que $r = 2$ et α est un réel quelconque. L'équation $g(z) = z$ donne une équation du second degré qui admet deux solutions complexes, qui dépendent de a.

(A) Si z est solution de $g(z) = z$, on a $\overline{a}z^2 - 2z + a = 0$.
(B) On a $1 + i\sqrt{3} = e^{i\pi/3}$.
(C) Les solutions de $g(z) = z$ s'écrivent $a(1 \pm \sqrt{3})$.
(D) Les solutions de $g(z) = z$ sont de module 1.
(E) Les solutions de $g(z) = z$ ont pour arguments $\pm\dfrac{\pi}{3}$.

On s'intéresse à une cellule qui est capable de produire deux molécules différentes, l'une notée A et l'autre B. Ces molécules sont produites selon les règles suivantes.

- Si la cellule est vivante, elle produit A, respectivement B, avec une probabilité de $P(A) = 1/2$, respectivement $P(B) = 1/2$.
- Si la cellule produit B, elle meurt tout de suite après la production de B.
- Si la cellule produit successivement quatre A, elle meurt tout de suite après la production du quatrième A.

On isole une de ces cellules qui n'a encore rien produit. On note X, respectivement Y, la variable aléatoire qui donne le nombre de A, respectivement B, produits par la cellule avant de mourir.

Question 9

(A) Après la mort de la cellule, les molécules produites peuvent être représentées par l'un des éléments de l'ensemble $\{B, AB, AAB, AAAB, AAAA\}$.
(B) On a $P(AB) = 1/5$.
(C) On a $P(AAB) = 1/8$.
(D) On a $P(X = 2) = 1/4$.
(E) On a $P(Y = 1) = 4/5$.

Question 10

(A) L'espérance de la variable aléatoire X est de $15/16$.
(B) L'espérance de la variable aléatoire Y est $7/16$.
(C) La probabilité que $X = 4$ sachant que $Y = 1$ (notée $P(X = 4 \mid Y = 1)$) est de $1/16$.
(D) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
(E) On isole cinq cellules qui n'ont encore rien produit. On suppose leur comportement indépendant. Après la mort des cinq cellules, la probabilité que k molécules B ait été produites en tout est de $\binom{5}{k}\left(\frac{1}{16}\right)^{5-k}\left(\frac{15}{16}\right)^{k}$ pour $k \leq 5$.

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

On rappelle que la fonction partie entière E est telle que $\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\mathrm{E}(3) = 3$, $\mathrm{E}(-2) = -2$, $\mathrm{E}(-3{,}14) = -4$ et $\mathrm{E}(3{,}14) = 3$. Dans les questions 11 et 12, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = x - \mathrm{E}(x) - \frac{1}{2}.$$

On rappelle que si g est une fonction périodique de période T, on peut écrire sa série de Fourier : $Sg(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Question 11

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

(A) Si x n'est pas un entier relatif, on a $f(-x) = -f(x)$.
(B) f est périodique de période 2π.
(C) $\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) = 0$.
(D) Les coefficients de Fourier b_n sont tous nuls.
(E) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(2\pi n t)\,\mathrm{d}t$.

Question 12

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

(A) $\forall k \in \mathbb{Z}, Sf(k) = 0$.
(B) On a $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$.
(C) On a $Sf\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
(D) On a $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$.
(E) En utilisant la relation de Parseval à la série de Fourier de f on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$.

Question 13

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

Soit a un réel non nul. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice représentative dans la base canonique est B.

(A) A est diagonalisable et admet deux valeurs propres : 0 et -1.
(B) Le rang de A est égal à 2.
(C) Le polynôme caractéristique de A est le polynôme nul.
(D) B est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et 2.
(E) $A + B$ est diagonalisable.

Question 14

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

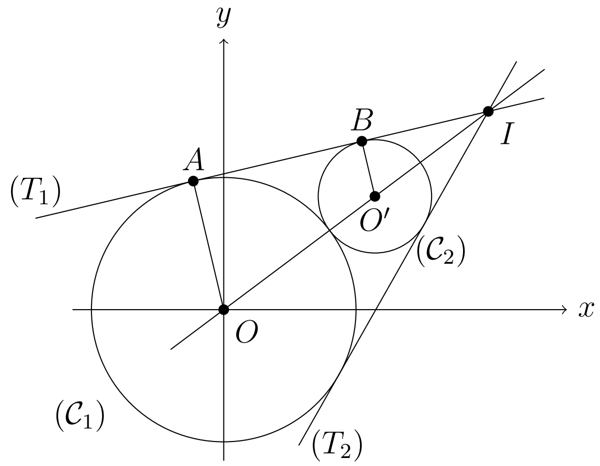
(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de propre de B associé à la valeur propre 2.
(B) A et B ont un sous-espace propre commun.
(C) $A^{2015} = A$.
(D) Le noyau de g est un sous-espace propre de g.
(E) L'application linéaire $g - \mathrm{id}$ est une projection.

Question 15

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique

Dans le plan (Oxy), on considère le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre O et de rayon 7, ainsi que le cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre O' de coordonnées $(8,6)$ qui est extérieurement tangent à $(\mathcal{C}_1)$ (voir la figure ci-dessous).

On note (T_1) et (T_2) les tangentes extérieures à $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$, (T_1) étant la tangente dont la pente est la plus petite. Les droites (T_1) et (T_2) sont sécantes en I. On appelle A le point de contact entre la droite (T_1) et le cercle $(\mathcal{C}_1)$, et B le point de contact entre la droite (T_1) et le cercle $(\mathcal{C}_2)$.



(A) Une équation cartésienne de $(\mathcal{C}_1)$ est $x^2 + (y-7)^2 = 0$.
(B) Le rayon du cercle $(\mathcal{C}_2)$ est 3.
(C) (T_1) et (T_2) sont les seules droites tangentes simultanément à $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.
(D) En appliquant le théorème de Thalès, on trouve $\overrightarrow{OI} = \dfrac{7}{4}\overrightarrow{OO'}$.
(E) Les coordonnées du point I sont $(14,7)$.

Question 16

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique

On note E l'ensemble des points Ω du plan tels qu'il existe un cercle de centre Ω extérieurement tangent à $(\mathcal{C}_1)$ et à $(\mathcal{C}_2)$.

(A) Une équation cartésienne de (T_1) est $x - 4y + 28 = 0$.
(B) $\Omega \in E$ si et seulement si $O\Omega - 7 = O'\Omega - 3$.
(C) (OO') est un axe de symétrie pour E.
(D) Les points de E sont plus proches de O que de O'.
(E) Le point de coordonnées $\left(\dfrac{21}{2}, 0\right)$ appartient à E.