BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS
-SESSION 2014-

É P R E U V E DE

M A T H É M A T I Q U E S

CODE ÉPREUVE : 967

L'usage de calculatrice est interdit.

A v e r t i s s e m e n t :

Tous les candidats doivent traiter les questions de 1 à 10.

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

DURÉE DE L'EPREUVE: 2H00

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\dfrac{1}{(1+2t)^3}=(1+2t)^{-3}$.

On calculera des développements limités au voisinage de 0 à l'ordre n (notés $dl_n(0)$), ce qui permettra d'étudier des limites de suites. $\varepsilon(t)$ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

Question 1

(A) Le $dl_3(0)$ de $(1+u)^\alpha$ est :

$$1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}u^3+u^3\varepsilon(u).$$

(B) Le $dl_3(0)$ de f est : $1-6t+12t^2-80t^3+t^3\varepsilon(t)$.

(C) Le $dl_3(0)$ de e^{at} est : $1+at+\dfrac{a^2t^2}{2}+\dfrac{a^3t^3}{3}+t^3\varepsilon(t)$.

(D) Le $dl_3(0)$ de $\ln(1+u)$ est: $u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{3}+u^3\varepsilon(u)$.

(E) Le $dl_3(0)$ de $\ln\left(f(t)\right)$ est: $-6t+6t^2-8t^3+t^3\varepsilon(t)$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\left(f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$. On utilisera des développements limités pour trouver un équivalent de u_n.

On calculera le $dl_2(0)$ de $\ln f(t)$, on en déduira les développement de u_n en fonction de n.

Question 2

(A) Si une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1, alors la suite de terme général , $(w_n)^n$ a également pour limite 1.

(B) On a : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$.

(C) Un équivalent de $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est :

$$-6\sqrt{n}+6-\frac{8}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(D) On a : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(u_n)}{\sqrt{n}}=-6$.

(E) La série de terme général $\dfrac{\ln(u_n)}{n}$ converge.

On veut calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan(x)}dx$ avec le changement de variable défini par $u=\sqrt{\tan(x)}$. On obtient alors $I=\int_0^{\infty}F(u)\,du$ avec une fraction rationnelle $F(u)$. On factorise le polynôme $u^4+1=(u^4+2u^2+1)-2u^2$ pour décomposer $F(u)$.

Question 3

(A) La dérivée de $u\mapsto \text{Arctan}(u)$ est $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.

(B) Avec ce changement de variable, on a : $dx=\dfrac{2u}{1+u^2}du$.

(C) On a : $F(u)=\dfrac{2u^2}{1+u^4}$.

(D) Un des facteurs irréductibles réels de u^4+1 est $u^2+\sqrt{2}u+1$.

(E) On a $F(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\dfrac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right)$.

On cherche ici une primitive de $F(u)$, puis à calculer l'intégrale I. On calculera d'abord les primitives des éléments $A=\dfrac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}$, $B=\dfrac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1}$.

Question 4

(A) Une primitive de A est $\ln(u^2+\sqrt{2}u+1)$.

(B) Une primitive de B est $\text{Arctan}(u\sqrt{2}+1)$.

(C) Une primitive de $\dfrac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}$ est : $\text{Arctan}\left(-1+u\sqrt{2}\right)+\ln\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)$.

(D) Une primitive de $F(u)$ est :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{Arctan}\left(1+\sqrt{2}u\right)+\text{Arctan}\left(-1+\sqrt{2}u\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\right).$$

(E) On a : $I=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

On définit la suite de fonctions $\forall t\in\left]0,\pi\right[, U_n(t)=\dfrac{\sin[(n+1)t]}{\sin(t)}$. Par le changement de variable bijectif $X=\cos(t)$, $X\in\left]-1,1\right[$, on leur associe les fonctions P_n telles que $\forall t\in\left]0,\pi\right[, P_n\left(\cos(t)\right)=U_n(t)$. Il s'agit de montrer que les P_n sont des polynômes de degré *n*, vérifiant une relation de récurrence $P_{n+1}(X)=A(X)P_n(X)+BP_{n-1}(X)$, avec $A(X)$ et une constante *B* indépendants de *n.* On calculera P_0,P_1, les coefficients $A(X)$, B puis $P_4(X)$, dont on calculera les racines.

Question 5

(A) On a $2\sin(a)\cos(b)=\sin(a+b)+\cos(a-b)$.

(B) On a $A(X)=2X, B=-1$.

(C) On a $P_1(X)=2X$ et $P_2(X)=4X^2-2$.

(D) On a $P_4(X)=16X^4-12X^2+1$.

(E) L'ensemble des racines de $P_4(X)$ est $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{4},\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right\}$.

On veut ici calculer la somme de la série entière $S=\sum_0^\infty U_n(t)t^n=\sum_0^\infty P_n(\cos(t))t^n$ pour $t\in\left]-1,1\right[$. On pose $T=\sum_0^\infty \frac{e^{i(n+1)t}}{\sin(t)}t^n$ et donc $S=\mathrm{Im}(T)$. On utilisera pour cela la relation $\sin(a)=\mathrm{Im}\left(e^{ia}\right)$, avec $a\in\mathbb{R}$, et la formule de sommation d'une série géométrique.

Question 6

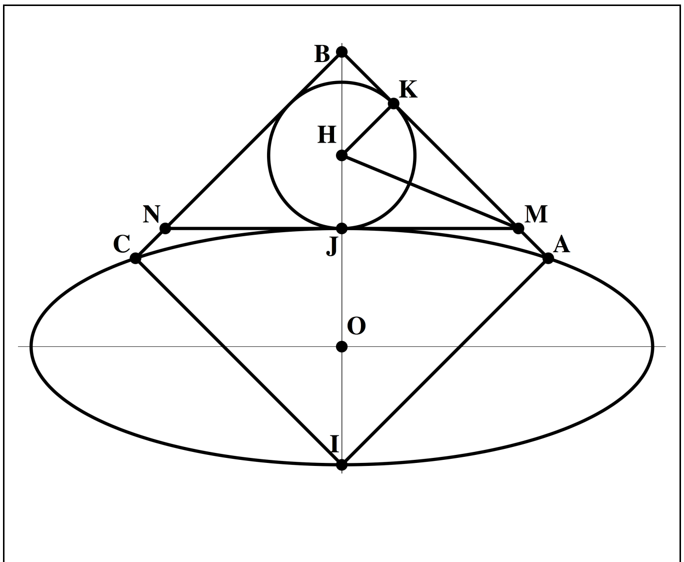
(A) T est une série géométrique de raison $q=te^{it}$.

(B) La série $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ est convergente si $|q|<1$, et sa somme vaut $\frac{a}{1-q}$.

(C) On a $S=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-te^{it}}\right)$.[Im : Partie imaginaire d'un complexe]

(D) On a $\frac{z}{1-te^{it}}=\frac{z(1-te^{-it})}{1-2\cos(t)t+t^2\cos^2(t)}$.

(E) On a $S=\frac{1}{1-2t\cos(t)+t^2}$.



Dans un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{i},\vec{j})$, on considère l'ellipse **(E)** d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $0<b<a$, et les points : $\mathbf{I}(0,-b)$, $\mathbf{J}(0,b)$.
La droite $(\mathbf{IA})$ d'équation $y=x-b$, recoupe **(E)** en **A**, la droite $(\mathbf{IC})$ d'équation $y=-x-b$ recoupe **(E)** en **C**. **(IABC)** est un carré.
La droite horizontale passant par **J** coupe $(\mathbf{AB})$ en **M** et $(\mathbf{BC})$ en **N**.
Le cercle $\gamma(\mathbf{H},r)$ inscrit dans **(MNB)** est tangent à **(E)** en **J** et à $(\mathbf{AB})$ en **K**. On a : $r=\mathbf{HJ}=\mathbf{HK}$.

On veut calculer les coordonnées de **A**, les longueurs **IA**, **IB**, **JB**, et le rayon $r=\mathbf{HJ}=\mathbf{HK}$ en fonction de *a* et *b*.

Question 7

(A) Les coordonnées (x_A, y_A) de **A** sont telles que : $x_A = \dfrac{2a^2 b}{a^2 + b^2}, y_A = b\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

(B) On a $\mathbf{IB} = \sqrt{2}\mathbf{IA}$.

(C) On a la distance $\mathbf{IA} = \sqrt{2}\dfrac{ab}{a^2 + b^2}$.

(D) On a $\mathbf{JB} = \mathbf{JM}$.

(E) On a $\mathbf{JB} = 2b\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

On déterminera l'angle $\alpha = \widehat{\mathbf{JMH}}$, on calculera $\tan(\alpha)$, et on en déduira la valeur de r.

Question 8

(A) On a $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

(B) On a $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$.

(C) $\tan(\alpha)$ est la racine positive de l'équation $t^2 - 2t - 1 = 0$.

(D) On a $r = \mathbf{MJ}.\cos(\alpha)$.

(E) On a $r = 2(\sqrt{2} - 1)b\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

Un haut-fourneau produit chaque jour de 0 à 10 000 tonnes de fonte brute. La quantité de fonte produite en un jour est une variable aléatoire X de densité définie par :

$f(x) = K\left(-x^2 + 10x\right)$ avec $0 \le x \le 10$.

x est la production journalière exprimée en milliers de tonnes.

Le paramètre K est à déterminer pour que f ait les propriétés d'une densité de probabilité. On note E l'espérance d'une variable aléatoire, et Var sa variance, F sa fonction de répartition.

Question 9

(A) K vaut $\dfrac{1}{500}$.

(B) $\mathrm{E}(X) = 5$.

(C) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X)^2 - \mathrm{E}(X^2)$.

(D) $\mathrm{Var}(X) = 30$.

(E) La fonction de répartition de X est sur $[0,10]$ $F(x) = \dfrac{1}{500}\left(15x^2 - x^3\right)$.

On considère maintenant que la production de fonte en milliers de tonnes pendant 30 jours est représentée par 30 variables aléatoires indépendantes $X_1,...,X_{30}$ chacune d'entre elles suivant la même loi de densité : $f(x) = K\left(-x^2 + 10x\right)$ sur $\left[0,10\right]$ pour une valeur convenable de *K*.

On considère que la production du jour *i* est insuffisante si $X_i \leq 2$.

En appliquant le théorème de la limite centrée, la production des 30 jours $S = \sum_{i=1}^{30} X_i$ peut être approchée par la loi normale (dite aussi loi de Gauss) de paramètres *m* et σ à préciser. On rappelle que si *Y* suit la loi de normale centrée réduite, $P\left(\left|Y\right| \leq\ 1{,}96\right) = 95\%$.

Question 10

(A) La probabilité qu'il y ait production insuffisante le jour *i* est $\frac{13}{125}$.

(B) La probabilité qu'il y ait production insuffisante pendant les trois premiers jours est $\frac{39}{125}$.

(C) La probabilité qu'il y ait une production suffisante pendant les 30 jours est $\left(\frac{112}{125}\right)^{30}$.

(D) La production des 30 jours *S* peut être approchée par une loi normale d'écart type $\sigma = 30$.

(E) La probabilité que la production des 30 jours *S* se situe entre $150 - 1{,}96\sqrt{150}$ et $150 + 1{,}96\sqrt{150}$ est 95%.

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right) = \left|\cos x\right|$. On se propose d'exprimer f sous la forme d'une série de Fourier et d'en déduire quelques relations intéressantes.

On note $sf(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos(2kx) + b_k(f)\sin(2kx)\right)$ la série de Fourier de f.

Question 11

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique)

(A) La fonction f est π-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.
(B) La fonction f est paire.
(C) Les coefficients a_k sont tous nuls.

(D) $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x \cos(2kx)\,dx$.

(E) $a_0 = \frac{4}{\pi}$.

Question 12

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique)

(A) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $2\cos(x)\cos(2kx) = \sin[(2k+1)x] + \sin[(2k-1)x]$.

(B) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \frac{4}{(4k^2-1)\pi}$.

(C) On peut déduire de $sf(0)$ que : $1 = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{(4k^2-1)\pi}$.

(D) On peut déduire de $sf\left(\frac{\pi}{2}\right)$ que : $2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(4k^2-1)}$.

(E) On peut déduire du théorème de Parseval que : $\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{(4k^2-1)^2\pi^2}$.

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil.

Soit un paramètre a réel et la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{I}$ est la matrice de l'identité.

Question 13

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

(A) Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est tel que $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2$.

(B) Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont $\{1, -1, i, -i\}$.

(C) 1 est une valeur propre de multiplicité 1.
(D) -1 est une valeur propre de multiplicité 2.
(E) On a pour toute valeur de *a*, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

Question 14

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

(A) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres pour la valeur propre 1.

(B) Pour toute valeur de *a,* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres pour la valeur propre -1.

(C) La matrice **A** est diagonalisable si a=0.
(D) Si a=1 on a $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.
(E) **A** est diagonalisable si et seulement si a=1.

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.

Dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère les quatre plans définis par des équations cartésiennes : $P_1 : y+z=0$, $P_2 : x-1=0$, $P_3 : y-z=0$, $P_4 : x+1=0$. On considère les intersections de ces plans : $D = P_1 \cap P_2$, $\Delta = P_3 \cap P_4$. On rappelle que la distance d'un point M de coordonnées (x,y,z) à un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ est $d(M,P) = \dfrac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Si D' est une droite quelconque, on note $d(M,D')$ la distance d'un point M à D'.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)

(A) D est une droite qui admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

(B) Le vecteur $\vec{n}_1$ de composantes $(0,1,1)$ est normal au plan P_1.

(C) Le plan P_2 est parallèle au plan P_1 .

(D) Si deux plans H et K sont perpendiculaires, la distance d'un point M à leur intersection est $\sqrt{d^2(\mathrm{M},H)+d^2(\mathrm{M},K)}$.

(E) Le carré de la distance d'un point M de coordonnées (x,y,z) à la droite D est $d^2(\mathrm{M},D) = (y+z)^2 + (x-1)^2$.

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)

(A) Le carré de la distance d'un point M de coordonnées (x,y,z) à la droite Δ est $d^2(\mathrm{M},\Delta)=\dfrac{(y-z)^2}{2}+(x-1)^2$.

(B) L'ensemble des points de l'espace qui sont à même distance (équidistants) de D, et de Δ est la surface H ayant pour équation : $\dfrac{(y-z)^2}{2}+(x+1)^2=\dfrac{(y+z)^2}{2}+(x-1)^2$.

(C) La surface H est une sphère.

(D) L'intersection de la surface H et du plan d'équation $z=0$ est une droite.

(E) L'intersection de la surface H avec le plan d'équation $x=1$ est une hyperbole.

❖