

BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS -SESSION 2013-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CODE ÉPREUVE : 967

L'usage de calculatrice est interdit.

A v e r t i s s e m e n t :

Tous les candidats doivent traiter les questions de 1 à 10.

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

DURÉE DE L'ÉPREUVE: 2H00

Dans les questions 1 et 2, on se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction $f_a : x \mapsto \frac{(1+x)e^{-x} - \cos(ax)}{x^3}$, où a est un réel fixé. Si f_a admet une limite finie ℓ en 0, on prolongera f_a par continuité en posant $f_a(0) = \ell$.

Dans les questions 1 et 2, on note D.L. pour développement limité et $\varepsilon(x)$ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

Question 1

- (A) La fonction f_a est impaire.
- (B) Pour avoir un D.L. de f_a à l'ordre 0 au voisinage de 0, il suffit d'avoir un D.L. de $(1+x)e^{-x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 et un D.L. de $\cos(ax)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
- (C) Un D.L. de e^{-x} à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$.
- (D) Un D.L. de $(1+x)e^{-x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)$.
- (E) Un D.L. de $\cos(ax)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $1 - \frac{ax^2}{2} + \frac{ax^4}{4} + x^4\varepsilon(x)$.

Question 2

- (A) Pour toute valeur de a , la fonction f_a admet une limite finie en 0.
- (B) Un D.L. du numérateur de f_a à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $\left(-\frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{x^3}{3} + (3 + a^4)\frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$.
- (C) Pour que f_a admette une limite finie en 0, il faut et il suffit que $a^2 = 1$.
- (D) Pour $a^2 = 1$, la limite de f_a en 0 est $\frac{1}{6}$.
- (E) Pour $a^2 = 1$, la fonction f_a est dérivable en 0 et sa dérivée est $-\frac{1}{6}$.

Question 3

Soient les polynômes $P(t) = -t^5 + t^3$ et $Q(t) = t^2 + t + 1$. Faire la division euclidienne de P par Q , sous la forme $P(t) = A(t)Q(t) + R(t)$ avec $\deg(R) < 2$. Utiliser cela pour décomposer puis calculer

l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{P(t)}{Q(t)} dt$.

- (A) On a $A(t) = -t^3 + t^2 + t - 2$.
- (B) On a $R(t) = t - 2$.
- (C) On a $\int_0^1 A(t) dt = \frac{1}{2}$.
- (D) On a $\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt = \ln(3)$.
- (E) On a $I = \frac{11}{6} + \frac{\ln(3)}{2} + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1}$.

Question 4

On cherche ici à calculer $J = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1}$ et en déduire la valeur de I . On décomposera $Q(t) = t^2 + t + 1$, en un carré en t plus une constante, puis on utilisera un changement de variable $X = at + b$.

- (A) On a $Q(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.
- (B) Une primitive de $X \mapsto \frac{1}{X^2 + 1}$ est $\ln(X^2 + 1)$.
- (C) Avec $a = \frac{2}{\sqrt{3}}, b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ on obtient $J = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dX}{X^2 + 1}$.
- (D) On a $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.
- (E) On a $I = -\frac{17}{12} + \frac{\ln(3)}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Soient (H) l'équation différentielle homogène : $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$,

(E_1) l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 75t - 25$,

et (E_2) l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 40\cos(3t)$.

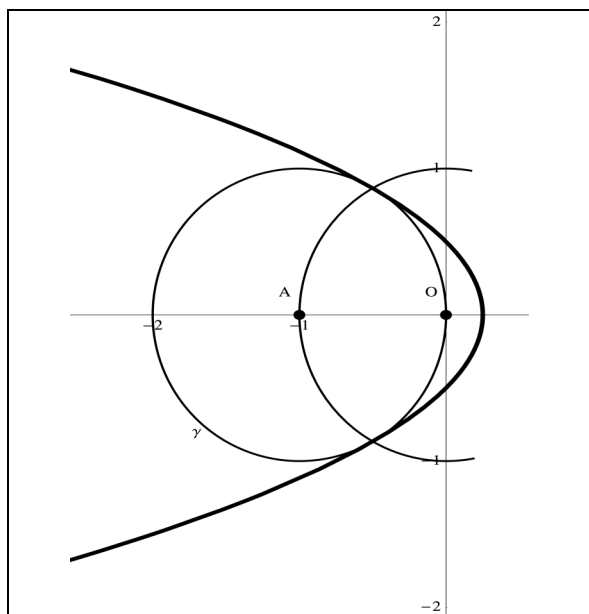
On cherche ici des solutions y à valeurs réelles.

Question 5

- (A) Il existe des solutions réelles de (H) de la forme e^{rt} , r racine de $r^2 - 4r + 5 = 0$.
- (B) La solution générale de (H) est $y(t) = e^{2t}(A\cos(t) + B\sin(t))$ avec A, B constantes réelles.
- (C) L'unique solution polynomiale de (E_1) est $y(t) = 15t + 7$.
- (D) La solution générale de (E_1) est :
 $15t + 7 + e^{2t}(A\cos(t) + B\sin(t))$ avec A, B constantes réelles.
- (E) Pour a, b réels positifs, il existe une unique solution de (E_1) telle que $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.

Question 6

- (A) Il existe une solution de (E_2) de la forme $y(t) = \cos(3t) + e^{2t}(A\cos(t) + B\sin(t))$.
- (B) La fonction définie par $y(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$ est solution de (E_2) si $A = 1, B = -3$.
- (C) La fonction $y : t \mapsto -\cos(3t) - 3\sin(3t) + e^{2t}(A\cos(t) + B\sin(t))$ est solution de (E_2) .
- (D) Il n'existe pas de solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
- (E) Il existe une solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 0, y(\pi) = 0$.



On associe à tout point $M=(x,y)$ du plan P muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ son affixe (le nombre complexe $z = x + iy$). On considère le point A d'affixe -1 et le point O d'affixe 0 . La courbe γ est décrite par le point m d'affixe $z = -1 - e^{2i\theta}$ pour $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$. On définit la transformation $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ par $Z = f(z) = 1/z^2$, et la transformation associée de $P - \{O\}$ associant à m (d'affixe z) le point $M = F(m)$ d'affixe Z . On se propose d'étudier des propriétés de f , de F et l'image Γ de γ par F .

Question 7

Calculer $r = |z| = |-1 - e^{2i\theta}|$ et $\varphi = \text{Arg}(-1 - e^{2i\theta})$ en fonction de θ . Déterminer les points fixes de f , définis par $u = f(u)$. On nomme I, J les points fixes de F , dont les affixes vérifient $\text{Re}(u) < 0$.

- (A) La courbe γ est le cercle $C(A,1)$, centré en A et de rayon 1, privé du point O .
- (B) On a $\varphi \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ et $\tan \varphi = \tan \theta$.
- (C) On a $z = -1 - e^{2i\theta} = 2\cos(\theta)e^{i\theta}$
- (D) Les points fixes de f sont $1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}$.
- (E) Les points I, J sont les intersections de γ et du cercle $C(O,1)$.

Question 8

On calculera Z en fonction de θ , puis les coordonnées (X,Y) de M en fonction de $t = \tan(\theta)$. En déduire l'équation cartésienne de la courbe Γ et la nature de cette courbe.

- (A) On a $Z = \frac{e^{-2i\theta}}{4\cos^2(\theta)}$.
- (B) Le point d'affixe $e^{2i\pi/3}$ appartient à la courbe Γ .
- (C) On a $X = \frac{1}{4} + t^2, Y = \frac{-t}{2}$.
- (D) L'intersection des courbes γ, Γ est constituée des deux points I, J .
- (E) L'équation cartésienne de Γ est $X + Y^2 = \frac{1}{4}$.

On observe que le temps d'attente à la caisse d'un supermarché (en minutes) suit une loi Normale de paramètres m et σ . Une étude sur un grand échantillon montre que 15,9% des clients ont une durée d'attente inférieure à 7 minutes, et 2,3% des clients ont une durée d'attente supérieure à 16 minutes. On appelle T la variable aléatoire qui à chaque client associe son temps d'attente à la caisse. On donne les valeurs suivantes pour une variable aléatoire Y qui suit une loi normale centrée réduite.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$P(\{Y \leq x\})$	50%	69,1 %	84,1 %	93,3 %	97,7 %	99,4 %	99,9 %

Question 9

- (A) $P(\{T \leq 7\}) = 15,9\%$.
 (B) $P(\{T \leq 16\}) = 2,3\%$.
 (C) Pour une variable aléatoire Y suivant la loi normale centrée réduite, $P(\{Y \leq -1\}) = 15,9\%$.
 (D) Les informations données sont insuffisantes pour calculer les valeurs de (m, σ) .
 (E) m et σ sont solutions du système
$$\begin{cases} m - \sigma = 7 \\ m + 2\sigma = 16 \end{cases}$$
.

Question 10

- (A) On trouve $(m, \sigma) = (10, 3)$.
 (B) La probabilité d'attendre plus de 19 minutes est 0,6%.
 (C) La probabilité d'attendre moins de 4 minutes est 2,3%.
 (D) La probabilité d'attendre plus de 16 minutes sachant que l'on a déjà attendu 10 minutes est de 4,6%.
 (E) La probabilité d'attendre moins de 1 minute est de 1%.

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.

Soit la fonction f , 2π – périodique telle que $\forall t \in]-\pi, \pi[$, $f(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et $f(\pi) = 0$.

On se propose d'étudier la série de Fourier de f notée $sf(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$.

Question 11

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.)

- (A) f est continue sur $\mathbb{R}$.
 (B) f est C^1 par morceaux sur $]-2\pi, 2\pi[$.
 (C) $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = sf(t)$.
 (D) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.
 (E) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

Question 12

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.)

(A) $\forall k \geq 1, b_k = 0$.

(B) $\forall k \geq 1, b_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{\left(k + \frac{1}{2}\right)} + \frac{\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)t}{\left(k - \frac{1}{2}\right)} \right]_{t=0}^{t=\pi}$.

(C) $\forall k \geq 1, b_k = \frac{8k(-1)^k}{(1-4k^2)\pi}$.

(D) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2}$.

(E) $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 = \frac{1}{2}$.

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 0, v_0 = 1, w_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = v_n \\ w_{n+1} = -2u_n + 2v_n + w_n \end{cases}.$$

Dans la suite de la question, on note $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Question 13

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

(A) Le déterminant de $\mathbf{A}$ vaut -1 .

(B) Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $P_{\mathbf{A}}(x) = (1-x)^3$.

(C) Le réel 2 est valeur propre de $\mathbf{A}$.

(D) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(E) Pour a réel quelconque, le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1 .

Question 14

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

- (A) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{U}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{U}_0$, où la matrice $\mathbf{A}$ est celle donnée dans la Question 13.
- (B) S'il existe une matrice $\mathbf{P}$ et une matrice $\mathbf{B}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{A}^n = (\mathbf{P}^{-1})^n \mathbf{B} \mathbf{P}^n$,
- (C) On a $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (D) On a $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 1 - (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 + (-1)^n & 1 - (-1)^n & 1 \end{pmatrix}$.
- (E) On a $\mathbf{U}_{2013} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.

Soit le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe Γ

d'équation cartésienne $y = \frac{1}{x}$ et ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$ avec le paramètre

$t \in \mathbb{R}^*$. On considère trois réels a, b, c , distincts et non nuls, et trois points de Γ , $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$,

$B\left(b, \frac{1}{b}\right)$, $C\left(c, \frac{1}{c}\right)$. Soit H l'orthocentre du triangle (A, B, C) , intersection des trois hauteurs.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

- (A) Γ est une parabole.
- (B) Γ admet la droite $(x'x)$ comme axe de symétrie.
- (C) Γ admet l'origine comme centre de symétrie.
- (D) Γ admet deux asymptotes.
- (E) Un vecteur directeur de la droite (BC) a pour composantes $(bc, 1)$.

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

- (A) Un vecteur normal à la droite (BC) a pour composantes $(1, bc)$.
- (B) Une équation de la hauteur du triangle (A, B, C) issue de A est $abcx - ay = a^2bc - 1$.
- (C) Une équation de la hauteur du triangle (A, B, C) issue de B est $abcx - by = ab^2c + 1$.
- (D) L'orthocentre H du triangle (A, B, C) a pour coordonnées $\left(abc, \frac{-1}{abc}\right)$.
- (E) L'orthocentre H du triangle (A, B, C) est sur Γ .