
On considère les fonctions h et F définies par :

$$\mathrm{h}(x) = x + \arctan(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\mathrm{h}(t)} dt$$

Question 1

(A) La fonction h est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
(B) La fonction h est paire.
(C) La fonction F est définie sur $\mathbb{R}^*$.
(D) La fonction F est impaire.
(E) F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée peut s'écrire $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{2\arctan(x) - \arctan(2x)}{(2x + \arctan(2x))(x + \arctan(x))}$.

Question 2

On veut comparer $\mathrm{F}(x)$ à $\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ pour $x > 0$. Étudier les variations de $\mathrm{g}(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{h}(t)}$ sur $[0,+\infty[$.

(A) La dérivée de $\mathrm{k}(x) = 2\arctan(x) - \arctan(2x)$ est $\mathrm{k}'(x) = \dfrac{1+7x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)}$.

(B) Sur $]0,+\infty[$, F est strictement croissante.

(C) Pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a : $\dfrac{t\arctan(t)}{t+\arctan(t)} \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(D) Pour $x \in]0,+\infty[$ $\left|\mathrm{F}(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt\right| > \frac{\pi}{2} \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt$.

(E) $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = \ln 2$.

Question 3

Soit la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$. Calculer sa décomposition en éléments simples $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+2x+2}$. En déduire une primitive $F(x)$ de $f(x)$, puis la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\infty} f(x)dx$. On utilisera la forme canonique : $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$.

(A) On a $a = -2, b = 2, c = 1$.

(B) Une primitive de $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ est $\mathrm{Arctan}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

(C) Une primitive est $F(x) = \mathrm{Arctan}(x+1) + \ln\left(\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}\right)$.

(D) On a $\mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{3}$.

(E) On a $I = \dfrac{\pi}{4} - \ln(2)$.

Question 4

On veut calculer par récurrence sur n l'intégrale $J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx$. Intégrer par parties pour obtenir une relation de la forme $J_n = a_n J_{n-1}$. Calculer J_0 et J_3.

(A) Une primitive de $\sqrt{1-x}$ est $\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$.

(B) On a $J_0 = \frac{2}{3}$.

(C) Pour tout $n \geq 1$, on a $a_n = \frac{2n}{2n+3}$.

(D) On a $J_3 = \frac{16}{315}$.

(E) On a la forme générale $J_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.

Soient (H) l'équation différentielle homogène : $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$

(E_1) l'équation différentielle $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2t^2$

et (E_2) l'équation différentielle $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 9e^{2t}$

Question 5

(A) La solution générale de (H) est $y(t) = Ae^{-2t} + Be^{t}$.
(B) La seule solution de (H) vérifiant $y(0) = y(1) = 0$ est la fonction nulle.
(C) La seule solution de (H) vérifiant $y(0) = 1$ et $y(\ln(2)) = 4$ est $y(t) = e^{2t}$.
(D) Il n'existe pas de solution y de (H) telle que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$.
(E) La seule fonction polynôme solution (E_1) est $y_1(t) = t^2 + t + 1$.

Question 6

(A) La dérivée seconde de te^{2t} est $(2t+2)e^{2t}$.
(B) Il existe une solution de (E_2) de la forme $(At+B)e^{2t}$.
(C) Toutes les solutions de (E_2) sont de la forme $A\,te^{2t} + Be^{-t}$.
(D) La solution de (E_2) telle que $y(0) = y'(0) = 0$ est $y(t) = e^{-t} - e^{2t} + 3te^{2t}$.
(E) Il existe une unique y solution de (E_2) telle que $y(0) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Question 7

On cherche l'unique nombre complexe $d = u + iv$ avec u,v réels positifs, tels que $d^2 = 12 + 16i$.
En déduire les équations satisfaites par u et v, puis une équation du second degré admettant u^2 comme solution (on posera $U = u^2$). En déduire les deux racines complexes z_1, z_2 du polynôme

$$R(z) = z^2 - (2+6i)z - 11 + 2i$$

(A) On a $u^2 - v^2 = 12$ et $uv = 8$.
(B) u^2 est la solution positive de l'équation $U^2 - 12U + 64 = 0$.
(C) On a $u = 4, v = 3$.
(D) Les racines de R(x) s'écrivent $\dfrac{1+4i \pm d}{2}$.
(E) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 + 4i$.

Question 8

Dans cet exercice, le polynôme R(z) est le même qu'à la question 7. Soit le polynôme :
$P(z) = z^3 - (5+6i)z^2 - (5-20i)z + 33 - 6i$. Montrer qu'il possède une racine réelle simple z_0, la calculer. On note A_0, A_1, A_2 les points du plan d'affixes z_0, z_1, z_2 dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(A) On a $z_0{}^3 - 5z_0^2 - 5z_0 + 33 = 0$ et $-6z_0^2 + 20z_0 - 6 = 0$.
(B) On a $z_0 = \dfrac{1}{3}$.
(C) On a $P(z) = (z - z_0)R(z)$.
(D) La distance $d(A_1, A_2)$ vaut $d(A_1, A_2) = 3\sqrt{5}$.
(E) Le triangle $A_0A_1A_2$ est isocèle.

L'urne A contient 7 boules vertes et 3 boules bleues, l'urne B contient 2 boules vertes et 8 boules bleues. On tire au hasard une boule (tirage équiprobable) dans l'urne A et on la met dans l'urne B. Puis on tire au hasard une boule de l'urne B et on la met dans l'urne A. On appelle V l'événement "la boule tirée de l'urne A (mise dans l'urne B) est verte", v est l'événement "la boule tirée de l'urne B (et mise dans l'urne A) est verte". $\overline{\mathrm{V}}$ et $\overline{\mathrm{v}}$ sont les événements contraires. La probabilité de réaliser les événements F et G est notée $\mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$.
La probabilité conditionnelle d'un événement F sachant que G s'est réalisé (parfois notée $\mathrm{P}_G(\mathrm{F})$) est ici notée $\mathrm{P}(\mathrm{F}|\mathrm{G})$.

Question 9

(A) $\mathrm{P}(\mathrm{V}) = \dfrac{7}{10}$.
(B) $\mathrm{P}(\mathrm{v}|\mathrm{V}) = \dfrac{4}{10}$.
(C) $\mathrm{P}(\mathrm{v}) = \dfrac{9}{11}$.
(D) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{v}}) = \dfrac{83}{110}$.
(E) $\mathrm{P}(V \cap v) = \dfrac{21}{110}$.

Question 10

(A) $\mathrm{P}\left(V|v\right)=\dfrac{7}{9}$.

(B) $\mathrm{P}\left(\bar{V}\cap\bar{v}\right)=\dfrac{21}{110}$.

(C) La probabilité qu'après avoir transféré une boule de A vers B, puis de B vers A, le contenu de A reste inchangé est $\mathrm{P}\left(\bar{V}\cap\bar{v}\right)+\mathrm{P}\left(V\cap v\right)=\dfrac{48}{110}$.

(D) $\mathrm{P}\left(V\cap\bar{v}\right)=\dfrac{12}{110}$.

(E) La probabilité qu'après avoir transféré une boule de A vers B, puis de B vers A, le contenu de A soit de 6 boules vertes et de 4 boules bleues est $\dfrac{56}{110}$.

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.

Question 11

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.)

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, impaire, de période 2π, et définie par $f(t)=-1$ sur $]0,1[$ et $f(t)=0$ sur $[1,\pi]$. On note sa série de Fourier

$$S(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt))$$

Calculer les coefficients de Fourier, comparer $f(t)$ et $S(t)$. Calculer $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

(A) On a $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=0$.

(B) On a $b_n=-\dfrac{4}{n}\sin^2(n)$.

(C) La série $S(t)$ converge en tout t vers $f(t)$.

(D) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^3\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

(E) La formule de Parseval donne $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^4\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{\pi}{16}$.

Question 12

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique .)

Dans cette question, f est la même fonction qu'à la question 11. Soit F définie par $F(t)=\int_{-\pi}^{t} f(u)du$. Examiner ses propriétés (symétrie, périodicité) et la calculer pour $t\in[0,\pi]$. Exprimer ses coefficients de Fourier (A_0, A_n, B_n) en fonction de ceux de $f(t)$ (utiliser une intégration par parties).

(A) On a $F(t)=1-t$ sur $[0,1]$ et $F(t)=0$ sur $[1,\pi]$.

(B) On a $A_0=0$ car $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=0$.

(C) On a pour $n\geq 1$, $A_n=\dfrac{4}{\pi n^2}\sin^2\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

(D) La fonction $F(t)$ est $2\pi-$périodique car $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=0$.

(E) En calculant la série de Fourier en 0, on trouve $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin^2\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $F_0=0$, $F_1=1$, et pour tout *n,* avec *n≥2,* $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

Soit la matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. On notera $\mathbf{U}_n=\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix}$. On note φ le nombre réel $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Question 13

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

(A) Le polynôme caractéristique de **A** est $P_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$.

(B) $\dfrac{1}{\varphi}=1-\varphi$.

(C) Les valeurs propres de **A** sont φ et $\dfrac{1}{\varphi}$.

(D) $\begin{pmatrix}\varphi\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice **A** associé à la valeur propre φ.

(E) $\begin{pmatrix}1\\ \varphi\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice **A.**

On pose $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\varphi & 1\\ 1 & -\varphi\end{pmatrix}$.

Question 14

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

(A) On a $\mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{A}\mathbf{U}_n$.

(B) $\mathbf{P}^{-1}=\dfrac{1}{\varphi+2}\mathbf{P}$.

(C) $\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & 1-\varphi\end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$.

(D) Il existe deux constantes α, β telles que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \alpha\varphi^n + \beta(\varphi - 1)^n$.

(E) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & -F_{n-1} \end{pmatrix}$.

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

Soient deux nombres réels *a,b* avec *a≥b>0*. On considère la courbe C de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$. Un point de cette courbe est noté $M(t)$. La tangente en $M(t)$ à C est notée $T(t)$.

(A) La courbe C est une parabole.

(B) Une équation de $T(t)$ est $bx\cos t + ay\sin t = 1$.

(C) Le point d'intersection des droites $T(t)$ et $T\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées : $\left(a\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right), b\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

(D) Les droites $T(t)$ et $T\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ sont orthogonales.

(E) L'ensemble E des points de coordonnées $\left(a\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right), b\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ se déduit de C par une homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$.

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

Soit l'espace affine euclidien à trois dimensions muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite D contenant O et ayant pour vecteur directeur $\vec{i}$, le point A de coordonnées (0,1,0) et la droite Δ contenant A et de vecteur directeur $\vec{k}$. On note S la surface regroupant tous les points M équidistants des droites D et Δ.

(A) La distance au carré d'un point M(*x,y,z*) à la droite D est $d^2(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = y^2 + z^2$.

(B) La distance au carré d'un point M(*x,y,z*) à la droite Δ est $d^2(\mathrm{M}, \Delta) = (x-1)^2 + y^2$.

(C) L'ensemble des points de l'espace à même distance de D et de Δ est la surface S d'équation $x^2 - z^2 - 2y + 1 = 0$.

(D) L'intersection de la surface S avec le plan d'équation $z = 0$ est une parabole.

(E) L'intersection de la surface S avec le plan d'équation $x = 1$ est une hyperbole.