Question 1

Étude de quelques propriétés de la fonction $\left| \begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto \text{Arctan}\, x \end{array} \right.$. Dans les développements limités (DL) qui suivent, $\varepsilon(x)$ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

(A) La fonction $\left| \begin{array}{ll} \tan: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tan x \end{array} \right.$ est la fonction réciproque de f.

(B) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f, $\left(f^{-1} \circ f\right)'(x) = \left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$.

(C) Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan' y = 1 - \tan^2 y$.

(D) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(E) Un DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est donné par :

$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Question 2

(A) Le DL à l'ordre 5 de f autour de 0 est $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$.

(B) Soit $g: x \mapsto \arctan\dfrac{1}{x+1}$. $\forall x \neq -1$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2}$.

(C) Soit $h: x \mapsto \arctan\dfrac{x}{x+2}$. $\forall x \neq -2$, $h'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2 + x^2}$.

(D) $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

(E) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\arctan\dfrac{1}{x+1} + \arctan\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{\pi}{4}$

Question 3

On veut calculer, pour u >0, $F(u) = \displaystyle\int_u^1 \frac{2x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$ et $\lim\limits_{u\to 0} F(u)$. On fera une intégration par parties, et on décomposera la fraction obtenue. On pose $G(u) = \displaystyle\int_u^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

(A) On a $F(u) = \dfrac{\ln(u)}{(u^2+1)^2} + G(u)$

(B) On a pour tout x non nul $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{-1}{x}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)}$

(C) On a $G(u)=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)-\ln(u)-\frac{\ln(2)}{2}$

(D) On a $F(u)=\frac{u^2\ln(u)}{u^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)-\frac{\ln(2)}{2}$

(E) On a $\lim_{u\to 0}F(u)=-\frac{\ln(2)}{2}$

Question 4

Pour p entier naturel on définit $J_p=\int_0^1 x^p\ln(x)dx$ et $A=\int_0^1\frac{\ln(x)}{1-x}dx$.

On pose $S_n=\sum_1^n\frac{1}{k^2}$, $R_n(x)=\int_0^1\ln(x)\frac{x^{n+1}}{1-x}dx$ et $M=\underset{0<x<1}{\mathrm{Max}}\left(\frac{-x\ln(x)}{1-x}\right)$(réel positif fini).

(A) Une intégration par parties donne $J_p=\frac{-1}{(p+1)^2}$

(B) On a $\sum_0^n x^k=\frac{1-x^n}{1-x}$

(C) On a $A=-S_{n+1}+R_n(x)$

(D) On a $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{1-x}=-\frac{1}{2}$

(E) Pour tout entier naturel n on a $\left|A+S_{n+1}\right|\le\frac{M}{n+1}$

On se propose de calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$ à l'aide de racines de polynômes. On notera $\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. On pose $P(z)=z^4+z^3+z^2+z+1$ et $Q(t)=t^2+t-1$

Question 5

(A) $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ est solution de l'équation $P(z)=0$

(B) $Q\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{P(z)}{z^2}$

(C) Les solutions de $Q(t)=0$ sont $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$

(D) $\alpha^2=\alpha-1$

(E) L'équation $z+\frac{1}{z}=\alpha$ admet comme solutions $\frac{\alpha+i\sqrt{\alpha+3}}{2}$ et $\frac{\alpha-i\sqrt{\alpha+3}}{2}$

Question 6

(A) $\left\{\frac{\alpha+i\sqrt{\alpha+3}}{2},\frac{\alpha-i\sqrt{\alpha+3}}{2},\frac{\beta+i\sqrt{\beta+3}}{2},\frac{\beta-i\sqrt{\beta+3}}{2}\right\}$ est l'ensemble des solutions de $P(z)=0$

(B) $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(C) $\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

(D) $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\beta}{2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

(E) $\tan\frac{2\pi}{5}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

Question 7

Soient les polynômes $P(x)=4x^6-12x^4+9x^2-1$ et $Q(x)=x^2-1$. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$: on notera $P(x)=P_1(x)Q(x)+R_1(x)$ avec $d°(R_1(x))<d°(Q(x))$. On cherche les racines de $P_1(x)$ (poser $x^2=X$).

(A) On a $R_1(x)=x-1$

(B) On a $P_1(x)=4x^4-8x^2+1$

(C) $P(x)$ a pour ensemble de racines réelles $\{1,-1\}$

(D) $P_1(x)$ ne possède que deux racines réelles

(E) L'ensemble des racines réelles positives de $P(x)$ est $\left\{1,\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}},\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$

Question 8

On demande de calculer le polynôme $T_6(x)$ tel que $T_6(\cos(\theta))=\cos(6\theta)$. On calculera pour cela d'abord le polynôme $T_3(x)$ tel que $T_3(\cos(\theta))=\cos(3\theta)$. On cherchera ensuite les racines du polynôme $T_6(x)$.

(A) On a $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)+1$

(B) On a $T_3(x)=4x^3-3x$

(C) On a $T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2+1$

(D) On a $T_6(x)=P(x\sqrt{2})$ [avec P défini à la question 7]

(E) L'ensemble des racines positives de $T_6(x)$ est $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2},\frac{\sqrt{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2}\right\}$

Question 9

On rend visite à une famille comprenant trois enfants. A chaque naissance, on sait que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille est $\frac{1}{2}$ et que le sexe des enfants est indépendant. Les enfants ont des ages tous différents. On notera par exemple FGG l'événement élémentaire une fille est l'ainée puis il y a deux garçons plus jeunes..

(A) On sonne, l'enfant qui ouvre est une fille, l'ensemble des possibles est : $\{FFF, FFG, FGF, FGG, GFF, GFG, GGF\}$

(B) On sonne, l'enfant qui ouvre est une fille, la probabilité que les deux autres enfants soient des garçons est $\frac{3}{7}$

(C) On apprend que la fille qui a ouvert est l'ainée, la probabilité que les deux autres enfants soient des garçons est $\frac{3}{7}$

(D) Un autre enfant apparaît derrière sa sœur ainée. C'est un garçon . La probabilité que l'enfant restant soit un garçon est $\frac{1}{2}$

(E) On apprend en plus que le garçon que l'on voit est le plus jeune . La probabilité que l'enfant restant soit un garçon est $\frac{1}{2}$

Dans une urne blanche, il y a 3 boules rouges et 5 boules vertes. Dans une urne noire il y a 2 boules rouges et 3 vertes. L'expérience consiste à tirer <u>simultanément</u> deux boules de l'urne blanche, de les mettre dans l'urne noire puis de tirer une boule de l'urne noire. On appelle r : l'événement " on a tiré 2 boules rouges de l'urne blanche", d :" on a tiré 2 boules de couleur différentes de l'urne blanche", et v : " on a tiré 2 boules vertes de l'urne blanche" et R l'événement "on a finalement tiré une boule rouge de l'urne noire". Les boules sont indiscernables.

Question 10

(A) La probabilité de tirer deux boules rouges de l'urne blanche est $P(r) = \frac{9}{64}$

(B) La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes de l'urne blanche est $P(d) = \frac{15}{28}$

(C) La probabilité de tirer une boule rouge de l'urne noire sachant que l'on avait tiré deux boules de couleurs différentes de l'urne blanche est $P(R|d) = \frac{3}{7}$

(D) La probabilité de tirer une boule rouge de l'urne noire est $P(R) = \frac{55}{196}$

(E) Sachant que l'on a tiré une boule rouge de l'urne noire, la probabilité d'avoir tiré précédemment deux boules rouges de l'urne blanche est $P(r|R) = \frac{12}{77}$

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.

Question 11

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.)

Soit la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x) \end{array}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on se propose de calculer $I_n = \int_0^{\pi} \cos(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x)\cos(nx)\,dx$.

(A) f est 2π -périodique et impaire.

(B) f est développable en série de Fourier et la somme de la série de Fourier est égale en tout réel x à $f(x)$.

(C) On pose $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. On a alors $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$.

(D) En utilisant la formule d'Euler, on obtient $f(x) = \frac{e^{i\cos x} + e^{-i\cos x}}{2} \cdot \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2}$.

(E) En développant le produit, on trouve : $f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{ie^{-ix}} + e^{ie^{ix}} + e^{-ie^{ix}} + e^{-ie^{-ix}}\right)$.

Question 12

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.)

(A) $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

(B) On a $f(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left[e^{-inx} + e^{inx} + (-1)^n e^{inx} + (-1)^n e^{-inx}\right]$

(C) Avec la formule d'Euler on a : $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!}\left(1 + (-1)^n\right)\cos(nx)$

(D) Pour n impair, $I_n = 0$.

(E) Pour $n \geq 2$ et pair, $I_n = \frac{(-1)^{n/2}}{n!}$.

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

On considère un espace vectoriel E de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ muni de la base $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On se donne l'application linéaire $f:E\to E$. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de f est $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$. On utilisera la matrice $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ et son inverse.

Question 13

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

(A) Le polynôme caractéristique de **A** est $P_{\mathbf{A}}(x)=-(x+1)^3$

(B) $\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}$ est un vecteur propre de f.

(C) La matrice $\mathbf{P}$ a pour inverse $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

(D) On a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(E) Pour tout entier n strictement positif on a $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

On considère maintenant les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0=w_0=0,\ v_0=1$ et pour tout entier naturel n, $\begin{cases}u_{n+1}=u_n+v_n\\ v_{n+1}=u_n+v_n+w_n\\ w_{n+1}=\quad -v_n+w_n\end{cases}$

Question 14

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

(A) On a pour tout entier naturel n, $u_n+w_n=2n$

(B) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0

(C) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

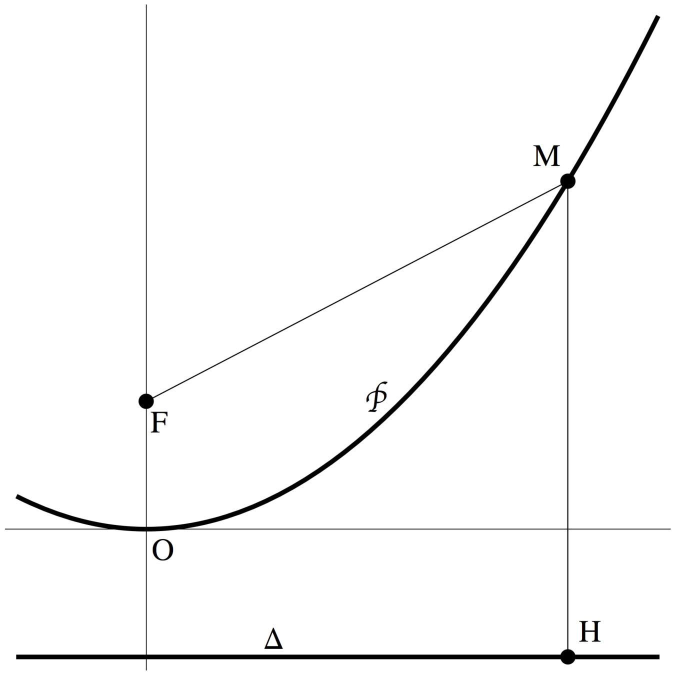
(D) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(E) On a pour tout entier naturel non nul n, $\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}\frac{n^2-n+2}{2}&n&\frac{n^2-n}{2}\\ n&1&n\\ \frac{n^2-n}{2}&n&\frac{n^2-n+2}{2}\end{pmatrix}$

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)



Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=\dfrac{x^2}{4}$, un point $M\left(x,y\right)$ de coordonnées $\left(x,y\right)$ de $\mathcal{P}$, le point $F\left(0,1\right)$, la droite Δ d'équation $y=-1$, et $H\left(x,-1\right)$ la projection orthogonale de M sur Δ.

(A) Pour tout réel x, $FM-HM=1$

(B) Les composantes d'un vecteur directeur $\vec{T}$ de la tangente en M à $\left(P\right)$ sont $\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{x}{2}\end{pmatrix}$.

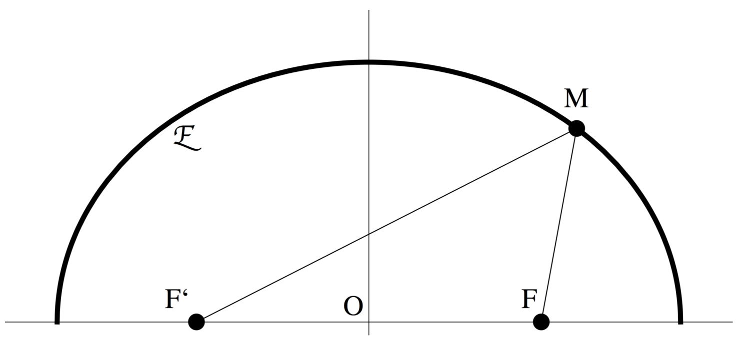
(C) Si $\vec{B}=\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{HM}$ est non nul alors $\vec{B}$ est un vecteur directeur de la bissectrice des droites $\left(FM\right)$ et $\left(FH\right)$.

(D) $\vec{B}$ a pour composantes $\begin{pmatrix}x\\ \dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix}$

(E) $\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{T}$.

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)



Soit $a>1$. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère $\mathcal{E}$ la demi-ellipse d'équation $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ avec $-a<x<a$ et $0<y\leq 1$. Soit $M\left(x,y\right)$ un point de coordonnées $\left(x,y\right)$ de $\mathcal{E}$.

On note $c=\sqrt{a^2-1}$ et on note $F'\left(-c,0\right)$ et $F\left(c,0\right)$ les deux foyers de l'ellipse.

(A) Un vecteur directeur $\vec{T}$ de la tangente en $M\left(x,y\right)$ à $\mathscr{E}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} \end{pmatrix}$.

(B) La norme de $\overrightarrow{FM}$ est $\left\|\overrightarrow{FM}\right\| = a - \dfrac{c}{a}x$

(C) La bissectrice de l'angle des deux vecteurs $\overrightarrow{MF}$ et par $\overrightarrow{MF'}$ a pour vecteur directeur $\vec{B} = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{\left\|\overrightarrow{FM}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{\left\|\overrightarrow{F'M}\right\|}$.

(D) $\vec{B}$ a pour composantes $\vec{B} = \dfrac{1}{a-\dfrac{c}{a}x}\begin{pmatrix} x-c \\ \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \end{pmatrix} + \dfrac{1}{a+\dfrac{c}{a}x}\begin{pmatrix} x+c \\ \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \end{pmatrix}$.

(E) $\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{T}$.