On note (E_1) l'équation différentielle $y''(t)-6y'(t)+9y(t)=e^{3t}$,

et (E_2) l'équation différentielle $y''(t)-6y'(t)+9y(t)=9t^2-3t+5$

L'équation homogène associée : $y''(t)-6y'(t)+9y(t)=0$ est notée (H)

Question 1

(A) Les solutions de (H) sont de la forme $y(t)=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}$ dans lequel r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique $r^2-6r+9=0$.

(B) $y(t)=(2t+3)e^{3t}$ est une solution de (H)

(C) (E_1) a une solution unique qui est $y(t)=t^2e^{3t}$

(D) La seule solution de (E_1) telle que $y(0)=1$ et $y'(0)=1$ est $y(t)=\left(t^2-2t+1\right)e^{3t}$

(E) Il existe des solutions de (E_1) ayant pour limite 0 en $+\infty$

Question 2

(A) Il existe des polynômes de degré 3 solution de (E_2)

(B) $y(t)=t^2+t+1+(2t+3)e^{3t}$ est une solution de (E_2)

(C) La solution générale de (E_2) est $y(t)=t^2+t+1+Ae^{3t}$ avec A constante réelle.

(D) L'unique solution de (E_2) vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=1$ est $y(t)=t^2+t+1$

(E) Il existe une unique solution de (E_2) ayant pour limite 0 en $-\infty$

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$. Dans les développements limités (d.l.) qui suivent, ε représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

Question 3

(A) Le domaine de définition de f contient $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

(B) Au voisinage de 0 $\sin x$ a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) : $\sin x=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+x^6\varepsilon(x)$

(C) Au voisinage de 0 $\sin^2 x$ a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) : $\sin^2 x=x^2-\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{2x^6}{45}+x^6\varepsilon(x)$

(D) Au voisinage de 0 $\ln(1+x)$ a pour d.l.6 : $\ln(1+x)=x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}+x^6\varepsilon(x)$

(E) Au voisinage de 0 $\ln(\cos x)$ a pour d.l.6 : $\ln(\cos x)=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^6}{45}+x^6\varepsilon(x)$

Question 4

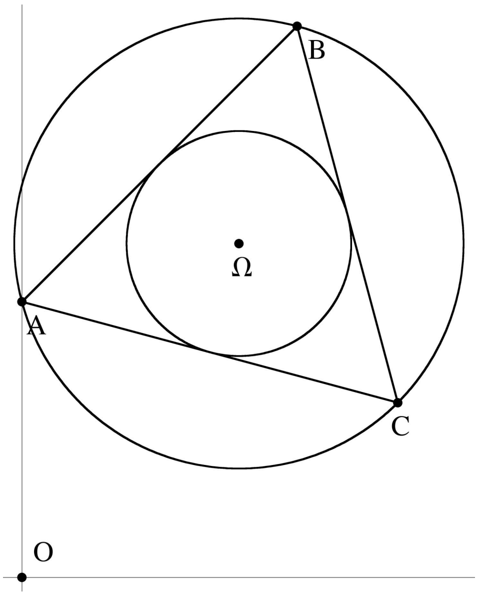
(A) Au voisinage de 0 $\dfrac{x^2}{\ln(\cos x)}$ a pour d.l.4 : $\dfrac{x^2}{\ln(\cos x)}=1-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x^4}{60}+x^4\varepsilon(x)$

(B) Le d.l. de $\dfrac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $-2+x^2-\dfrac{x^4}{6}+x^4\varepsilon(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-2$

(D) $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 1$

(E) Au voisinage de 0^+, la courbe représentative de f reste au-dessus de la parabole d'équation $y = -2 + x^2$



On associe à tout point M=(x,y) du plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ son affixe, le nombre complexe $z = x + iy$. On considère les points A,B d'affixes respectifs $a = i$, $b = 1 + 2i$. On veut déterminer le point C d'affixe c, tel que le triangle (ABC) est équilatéral, avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$.

Question 5

(A) On a $c - a = (b - a)e^{-i\frac{\pi}{3}}$

(B) On a $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$

(C) On a $c = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

(D) Les côtés du triangle (ABC) ont pour longueurs 2

(E) Le module de c est $\sqrt{4 + \sqrt{3}}$

On veut déterminer l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle (ABC), le rayon R du cercle circonscrit (passant par ABC) et le rayon r du cercle inscrit (tangent aux 3 côtés), et la surface S du triangle (ABC).

Question 6

(A) On a $\omega = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{i}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)$

(B) On a $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$

(C) On a $r = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

(D) On a $S = \frac{r + R}{\sqrt{2}}$

(E) On a $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour $X \in]-2,1[$, soit l'intégrale $I(X)=\int_{2/3}^{X} \frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x}{2+x}\right)^{1/3} dx$. On pose $t=\left(\frac{1-x}{2+x}\right)^{1/3}$, et on obtient l'intégrale $I(X)=J(T)=\int_{t_1}^{T} g(t)dt$ à condition de déterminer correctement t_1 et T, on décompose ensuite la fraction rationnelle $g(t)$.

Question 7

(A) On a $x=\frac{1-2t^3}{1+t^3}$

(B) On a $dx=\frac{-6t^2}{(1+t^3)^2}dt$

(C) On a $t_1 = 1/2$ et $T=\left(\frac{1-X}{2+X}\right)^{1/3}$

(D) On a $g(t)=\frac{1}{1+t^3}$

(E) On a $g(t)=-\frac{1}{t+1}+\frac{t-2}{t^2-t+1}$

On se propose par intégration de calculer $J(T)$. En déduire $\lim_{X\to -2} I(X)=A$ et $\lim_{X\to 1} I(X)=B$

Question 8

(A) Une primitive de $\frac{1}{t^2-t+1}$ est $\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$

(B) Une primitive de $\frac{t-2}{t^2-t+1}$ est $\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$

(C) On a $J(T)=\frac{1}{2}\ln\left(3\frac{T^2-T+1}{(T+1)^2}\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2T-1}{\sqrt{3}}\right)$

(D) A existe et vaut $\frac{\ln 3}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

(E) B existe et vaut $\frac{\ln 3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Des objets fabriqués en usine ont une durée de fonctionnement (en années) qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ (espérance m, écart type σ). On sait que: $P(\{T<8,335\})=5\%$ et $P(\{T>11,96\})=2,5\%$. En consultant une table de la loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0,1)$, on constate que si X suit cette loi, $P(\{X<1,645\})=95\%$, $P(\{X<1,96\})=97,5\%$, $P(\{X<2,575\})=99,5\%$

Question 9

(A) $\frac{8,335-m}{\sigma}=1,645$

(B) $\dfrac{11,96-m}{\sigma}=1,96$

(C) $\begin{cases} m-1,645\sigma=-8,335 \\ m+1,96\ \sigma=11,96 \end{cases}$

(D) $m=10$

(E) $\sigma=2$

Question 10

(A) $P(\{8,335<T<11,96\})=92,5\%$

(B) $P(\{8,04<T<11,96\})=95\%$

(C) $P(\{|T-10|>2,575\})=1\%$

(D) La probabilité conditionnelle que $\{T<11,96\}$ sachant que $\{T>8,04\}$ est $P(\{T<11,96\}|\{T>8,04\})=5\%$

(E) La probabilité conditionnelle que $\{T>11,96\}$ sachant que $\{T<8,04\}$ est $P(\{T>11,96\}|\{T<8,04\})=0$

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.

Soit $f(x)=x-1/2$ sur $[0,1[$, prolongée par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de calculer les coefficients de Fourier de f. À l'aide du développement en série de Fourier effectué à la question 11, on calculera la somme de la série des $\dfrac{1}{n^2}$

Question 11

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.)

(A) La fonction f est paire

(B) La série de Fourier de f s'écrit $S_f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi nx)$

(C) La série de Fourier $S_f(x)$ converge en tout réel x vers $f(x)$

(D) $b_n=2\int_0^1\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\sin(2\pi nx)\,dx$

(E) $b_n = \dfrac{1}{\pi n}$

Question 12

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique .)

(A) Pour $x = \dfrac{1}{4}$ on a $\dfrac{-1}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\pi}$

(B) Pour $x = \dfrac{3}{4}$ on a $\dfrac{1}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)\pi}$

(C) Dans le cas de la fonction f étudiée en question 11, l'égalité de Bessel donne : $\int_0^1 \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n)^2$

(D) $\int_0^1 \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 dx = -\dfrac{1}{4}$

(E) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

On considère un espace vectoriel E de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On pose $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On se donne les applications linéaires $f : E \to E$ et $g : E \to E$.

Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de f est $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \mathbf{I} - \dfrac{1}{3}\mathbf{U}$ et celle de g est $\mathbf{S} = \mathbf{I} - \dfrac{1}{6}\mathbf{U}$.

Question 13

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

(A) Pour n'importe quelles matrices carrées $n \times n$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$

(B) On a $\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}$

(C) On a $\mathbf{P}^2 = \left(\mathbf{I} - \dfrac{1}{3}\mathbf{U}\right)^2 = \mathbf{P}$

(D) On a $g^2 = f$

(E) La matrice $\mathbf{S}$ est inversible.

Question 14

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

(A) La matrice $\mathbf{P}$ est de rang 3

(B) Le déterminant de $\mathbf{P}$ est 0.

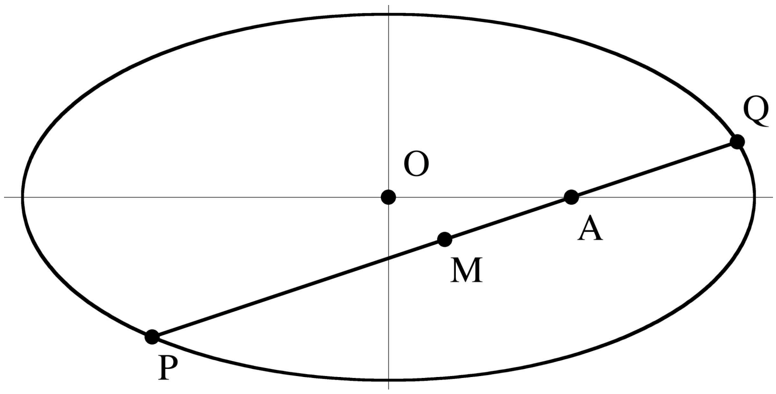
(C) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur propre de l'application f

(D) 0 n'est pas une valeur propre de f

(E) $\vec{i}-\vec{k}$ est un vecteur propre de l'application f

---

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.



On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé. On considère le point $A(1,0)$ à l'intérieur de l'ellipse E de centre $(0,0)$, de demi grand axe de longueurs 2 sur $(x'x)$ et de demi petit axe de longueur 1 sur $(y'y)$ (Voir figure). On trace la droite D_t de pente t passant par A, qui coupe E en P et en Q. L'objet de cet exercice est de trouver l'ensemble Γ des milieux M des segments $[P,Q]$ lorsque t varie sur $\mathbb{R}$.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

(A) Une équation de E est : $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(B) Une équation de D_t est : $y=t(x-1)$

(C) Les abscisses des points formant l'intersection de E et de D_t sont les solutions de l'équation : $\dfrac{x^2}{4}-\left(t(x-1)\right)^2=1$

(D) L'origine du repère appartient à Γ

(E) Soit $P(X)=aX^2+bX+c$, un polynôme du second degré. Ses racines r_1 et r_2 vérifient : $r_1+r_2=\dfrac{b}{a}$

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

(A) L'abscisse du point M, milieu du segment $[P,Q]$ est donnée par : $x_t=\dfrac{8t^2}{4t^2+1}$

(B) L'ordonnée du point M, milieu du segment $[P,Q]$ est donnée par $y_t=\dfrac{-t}{4t^2+1}$

(C) On a la relation $t=\dfrac{-x_t}{4y_t}$

(D) En réinjectant cette valeur de t dans la définition de y_t, on obtient une équation de Γ qui est $\dfrac{\left(x_t-\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\left(y_t\right)^2=\dfrac{1}{16}$

(E) La courbe Γ est une hyperbole.