

On note (E_1) l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -8t^2$,
 et (E_2) l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -9e^{-2t}$
 L'équation homogène associée : $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$ est notée (H)

Question 1

- (A) On peut trouver des fonctions polynômes de degré 4 solutions de (E_1)
- (B) Il existe une unique fonction polynôme de degré 2 solution de (E_1) .
- (C) La seule solution de (E_1) telle que $y(0) = 0$ est $y(t) = t^2 - t$
- (D) Les solutions de (H) de la forme $y(t) = e^{rt}$ sont obtenues en prenant pour r les solutions de l'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$.
- (E) Les solutions de (H) sont toutes de la forme $y(t) = A(e^{-2t} + e^t)$

Question 2

- (A) Une solution particulière de (E_2) est $y(t) = (t + 3)e^{-2t}$
- (B) Une solution particulière de (E_2) est $y(t) = \frac{1}{16}e^{-2t} \cos(2t)$
- (C) La solution générale de (E_2) est $y(t) = (3t + A)e^{-2t} + Be^t$ avec A, B constantes réelles.
- (D) L'unique solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ est $y(t) = (3t + 2)e^{-2t} - 2e^t$
- (E) Il existe une unique solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$

Soient les fonctions f, g définies pour $x > 0$ par :

$$f(x) = (2x - 1) \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + x + 1}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = (x^2 - x) \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + x + 1}\right)$$

Dans les développements limités, la notation ε représente une fonction qui tend vers 0 au point considéré, et qui n'est pas nécessairement la même dans chaque formule.

Question 3

- (A) Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + u)$ est :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \varepsilon(u)$$

- (B) Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + u + u^2)$ est :

$$\ln(1 + u + u^2) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \varepsilon(u)$$

- (C) $f(x) + 2$ est équivalent à $\frac{11}{6x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$

- (D) On a $g(x) = -x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6x} + \frac{\varepsilon(x)}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$

- (E) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + x = \frac{1}{2}$.

On calcule, par intégration par parties, $h(x) = \int_1^x f(t) dt$, puis $\lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) + 2x)$.

Question 4

- (A) La dérivée de $\ln\left(\frac{x^2}{x^2+x+1}\right)$ par rapport à x est $\frac{x+2}{x(x^2+x+1)}$.
- (B) On a $h(x) = g(x) - x + 3 \int_1^x \frac{dt}{t^2+t+1}$
- (C) On a $\operatorname{Arctan} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$
- (D) Une primitive de $\frac{1}{1+x+x^2}$ est $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.
- (E) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) + 2x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$
-

On dispose de 12 jetons numérotés de 1 à 12. On appelle "main" 4 jetons de numéros distincts tirés sans remise dans les 12 jetons, sans tenir compte de l'ordre de la distribution.

Question 5

- (A) Le nombre total de "mains" est 495.
- (B) Il y a 30 "mains" ne comportant que des numéros pairs
- (C) Il y a 120 "mains" comportant trois numéros pairs et un numéro impair.
- (D) Il y a 8 "mains" comportant 4 numéros consécutifs.
- (E) Il y a 70 "mains" comportant 4 numéros dont seulement 3 sont consécutifs

On suppose que l'on tire au hasard et sans remise les quatre jetons constituant une "main". On se propose de calculer la probabilité de certains tirages.

Question 6

- (A) La probabilité de tirer une "main" dont la somme des numéros est 42 est $\frac{1}{490}$
- (B) La probabilité de tirer une "main" ayant trois numéros pairs et un numéro impair est $\frac{8}{33}$.
- (C) La probabilité de tirer une "main" dont la somme des numéros est paire est $\frac{1}{2}$
- (D) La probabilité de tirer une "main" dont la somme des numéros est 11 est égale à la probabilité de tirer une "main" dont la somme des numéros est 41.
- (E) La probabilité de tirer une "main" comportant 4 numéros consécutifs est $\frac{1}{55}$
-

Soient les polynômes $P(x) = x^6 - 8\sqrt{2}x^3 + 64$ et $Q(X) = X^2 - 8\sqrt{2}X + 64$. On calculera les racines de Q nommées X_1, X_2 puis les racines de P en extrayant dans $\mathbb{C}$ leurs racines cubiques.

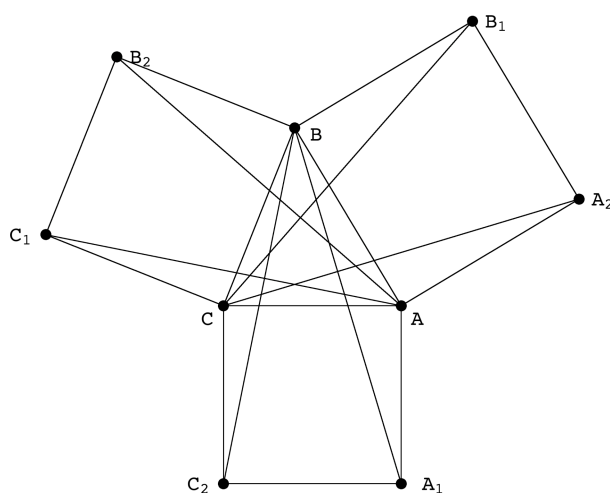
Question 7

- (A) Les racines de Q sont $X_1 = 8e^{i\pi/4}$ et $X_2 = 8e^{-i\pi/4}$.
- (B) L'équation $x^3 = X_1$ possède une seule solution complexe $x = 2e^{i\pi/12}$.
- (C) Les racines de P sont les racines cubiques de X_1 et leurs conjugués complexes
- (D) Les racines de P sont toutes de module 2.
- (E) Les racines de P à partie imaginaire positive ont pour arguments $\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}$

On note (x_1, x_2, x_3) les racines de P à partie imaginaire positive, classées par partie réelle décroissante. On les utilisera pour obtenir une factorisation complexe de $P(x)$, on en déduira une factorisation réelle de $P(x)$ en facteurs du second degré. On note $\text{Re}(x_1)$ la partie réelle de x_1

Question 8

- (A) On a $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.
- (B) On a $\text{Re}(x_1) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$
- (C) On a $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$
- (D) On a $P(x) = \prod_{k=1}^3 (x^2 + 2\text{Re}(x_k)x + 4)$
- (E) Un facteur réel de $P(x)$ est $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{6})x + 4$



Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère trois points quelconques non alignés A, B, C d'affixe a, b, c respectivement. Le triangle (ABC) est quelconque mais les sommets sont donnés dans le sens direct comme dans la figure ci-contre. Soient les nombres complexes :

$$\begin{cases} a_1 = a + (c - a)i \\ b_1 = b + (a - b)i \\ c_1 = c + (b - c)i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_2 = a - (b - a)i \\ b_2 = b - (c - b)i \\ c_2 = c - (a - c)i \end{cases}$$

Les points sont donnés par leurs affixes : $A_1(a_1), B_1(b_1), C_1(c_1), A_2(a_2), B_2(b_2), C_2(c_2)$

Question 9

- (A) On passe de C à A_1 par une rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{+\pi}{2}$
- (B) On passe de B à A_2 par une rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{+\pi}{2}$
- (C) Les segments $[B, A_1]$ et $[C, A_2]$ ont toujours la même longueur.
- (D) Les segments $[B, A_1]$ et $[C, B_1]$ ont toujours la même longueur.
- (E) Les droites (BA_1) et (CA_2) sont toujours orthogonales.

Question 10

- (A) Le quadrilatère (ACC_2A_1) est toujours un carré.
- (B) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $(a - b)$.
- (C) Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ a pour affixe $(b + c)i$
- (D) $A_1A_2^2 = BA^2 + CA^2 + (a - b)(\bar{a} - \bar{c}) + (a - c)(\bar{a} - \bar{b})$
- (E) On a $A_1A_2^2 + B_1B_2^2 + C_1C_2^2 = 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

On note f la fonction de période 2π , avec :

$$\begin{cases} f(x) = \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ f(x) = 0 & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$S(x)$ la série de Fourier de f : $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. On la calculera, en spécifiant a_0, a_1, b_1 , puis les autres coefficients.

Question 11

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.)

(A) On a $2 \sin(x) \cos(nx) = \sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x]$

(B) $a_0 = \frac{2}{\pi}$

(C) $a_1 = \frac{1}{2}$

(D) Si n est impair, alors $a_n = 0$

(E) Si n est pair et $n > 0$, $a_n = \frac{2}{\pi(1-n^2)}$

On comparera les valeurs de $f(x)$ et $S(x)$ pour un x bien choisi, puis on appliquera l'égalité de Parseval.

Question 12

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.)

(A) On a $\forall n \geq 1, b_n = 0$

(B) On a $S(x) = \frac{1}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \cos(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{1-4p^2} \cos(2px) \right]$

(C) On a $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$

(D) $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{2}$

(E) $\frac{\pi^2}{4} = 2 + 4 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}$

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

On considère un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Un endomorphisme f de $\mathcal{E}$ a pour matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$

Question 13

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

- (A) Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $P_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$
- (B) La matrice $\mathbf{A}$ admet une valeur propre double et une valeur propre simple.
- (C) La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.
- (D) $\mathbf{A}^2$ est la matrice de l'application identique.
- (E) f est une projection sur une droite suivant un plan.

Question 14

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

- (A) La famille $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$ est liée.
- (B) La matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (C) $\mathbf{A}^{10} = \mathbf{A}$
- (D) Pour tout entier naturel n , $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (E) La matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.

Un plan est muni des repères orthonormés $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{S} = (O; \vec{I}, \vec{J})$ avec $\begin{cases} \vec{I} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \\ \vec{J} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \end{cases}$

(L'origine est la même). Les coordonnées d'un point M sont notées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$ et (X, Y) dans le repère $\mathcal{S}$. On se propose de trouver quelques propriétés de la courbe C d'équation cartésienne : $5x^2 + 5y^2 - 6xy = 8$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

- (A) La courbe C est le cercle centré à l'origine et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
- (B) La courbe C est symétrique par rapport à l'origine O.

(C) La formule donnant les coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$ à partir des coordonnées (X, Y)

$$\text{dans le repère } S \text{ est } \begin{cases} x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

(D) Une équation cartésienne de C dans le repère S est $X^2 + 4Y^2 = 4$

(E) La courbe C admet une asymptote oblique d'équation $X + 2Y = 0$ dans le repère S .

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

(A) La courbe C est une ellipse de demi grand-axe a valant 4

(B) La courbe C est une ellipse de demi petit-axe b valant 1

(C) La courbe C a deux foyers F et F' de coordonnées respectives $(\sqrt{3}, 0)$ et $(-\sqrt{3}, 0)$ dans le repère S .

(D) La courbe C a pour excentricité $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(E) Le cercle centré à l'origine et de rayon 2 est tangent à C en deux points.