On rappelle que la racine cubique, notée $\sqrt[3]{x}$ ou encore $x^{\frac{1}{3}}$, est définie pour tout réel positif ou négatif x et que par exemple $\sqrt[3]{-8} = -2$. On considère la fonction de variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$. On étudie les branches infinies puis les variations et le graphe de cette fonction.

Question 1

(A) La fonction $\sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(B) On a $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

(C) Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+u)^{1/3}$ est $1 + \dfrac{u}{3} + \dfrac{u^2}{9} + u^2\varepsilon(u)$

(D) Pour que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax - b = 0$ il faut que $a = -1$ et $b = -\dfrac{2}{3}$

(E) Le graphe de f est en-dessous de la droite d'équation $y = -x + \dfrac{2}{3}$ lorsque x tend vers $+\infty$

Question 2

(A) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ et sa dérivée est $\dfrac{4 - 3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}$

(B) La fonction f est croissante si $x < \dfrac{4}{3}$ et décroissante sinon.

(C) Le graphe de f a une tangente verticale en $x = 0$

(D) La fonction f a un maximum unique en $x = 4/3$

(E) La fonction f a un minimum local unique en $x = 0$

Sur $I =]-\pi, +\pi[$, on considère la fonction h définie par $h(x) = \int_0^{x/2} \dfrac{dv}{\cos(v)}$. Pour calculer l'intégrale, on fera le changement de variable $t = \tan(v/2)$.

Question 3

(A) La dérivée de $\tan(v/2)$ est égale à $1 + 2t^2$

(B) On a $\cos(v) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(C) On a $h(x) = \int_0^{\tan(x/4)} \dfrac{2dt}{1-t^2}$

(D) Une primitive de $\dfrac{1}{1-t^2}$ est $\mathrm{Arc}\tan(t)$

(E) On a $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+\tan(x/4)}{1-\tan(x/4)}\right)$

On montrera que la fonction h est bijective de $I \to J$ pour un intervalle J à préciser, et on exprimera la fonction réciproque $k = h^{-1}$ telle que si $x \in I$ et $y \in J$ on a par $h(x) = y \Leftrightarrow x = k(y)$.

Question 4

(A) On a $y = \ln\left(\dfrac{1+u}{1-u}\right) \Rightarrow u = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$

(B) La fonction h est une bijection décroissante de I sur $J = h(I)$

(C) On a $J =]0, +\infty[$

(D) On a $\operatorname{ch}(t/2) = \dfrac{e^{t/2} - e^{-t/2}}{2}$ et $\operatorname{sh}(t/2) = \dfrac{e^{t/2} + e^{-t/2}}{2}$

(E) Sur $\mathbb{R}$ on a $k(y) = 4 \operatorname{Arc}\tan\big(\operatorname{th}(y/2)\big)$

On considère l'équation différentielle (E_1) $x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \frac{1}{4})y(x) = 0$ pour $x > 0$.

On établira l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u(x) = \sqrt{x}\ y(x)$, et on la résoudra.

Question 5

(A) On a $y'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{u(x)}{2x\sqrt{x}}$

(B) On a $y''(x) = \dfrac{u''(x)}{\sqrt{x}} - \dfrac{u'(x)}{x\sqrt{x}} + \dfrac{3u(x)}{4x^2\sqrt{x}}$

(C) La fonction u est solution de l'équation différentielle $u'' + u = 0$

(D) La solution générale de (E_1) s'écrit $y(x) = A\dfrac{e^x}{\sqrt{x}} + B\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$

(E) Les solutions de (E_1) telles que $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x)$ existe s'écrivent $y(x) = B\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

On considère l'équation différentielle (E_2) $x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - a)y(x) = 0$, et les fonctions $v(x) = \int_0^x t\sin(t)dt$ et $z(x) = \dfrac{v(x)}{x\sqrt{x}}$. On calculera ces fonctions, et on montrera que z est solution de (E_2) pour une valeur de a à déterminer.

Question 6

(A) L'intégration par parties donne $v(x) = -x\cos(x) + \sin(x)$

(B) Un équivalent de $z(x)$ quand $x \to 0^+$ est $\dfrac{1}{2}x^{3/2}$

(C) On a $xv''(x) - 2v'(x) + xv(x) = 0$

(D) On a $x^2 z''(x) = \sqrt{x}\ v''(x) - 3\dfrac{v'(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{15}{4}x\sqrt{x}\ v(x)$

(E) z est solution de (E_2) pour $a = \dfrac{9}{4}$

On veut calculer le polynôme $P(X)$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(5t) = P(\cos(t))$. On calculera pour cela l'expression $S = (\cos(t) + i\sin(t))^5$.

Question 7

(A) On a $\cos(5t) = \mathrm{Re}(S)$
(B) On a $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 12a^3b^2 + 12a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
(C) On a $\mathrm{Re}(S) = \cos^5(t) + 10\cos^3(t)\sin^2(t) - 5\cos(t)\sin^4(t)$
(D) On a $P(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$
(E) Sur l'intervalle $[-1,+1]$, le polynôme $P(X)$ prend 3 fois la valeur $+1$.

On montrera que $P(X)$ possède 5 racines distinctes dans l'intervalle $[-1,+1]$, notés X_k avec k de 0 à 4 avec $1 > X_0 > X_1 ... > X_4 > -1$ et on les calculera explicitement. On déterminera aussi les valeurs correspondantes de t_k définies par $X_k = \cos(t_k)$ et $t_k \in [0,\pi]$.

Question 8

(A) On a $t_k = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}$
(B) On a $X_2 = 0$ et $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$
(C) On a $X_4 = -X_0$ et $X_1 = -X_3$
(D) On a $X_0 = \dfrac{\sqrt{10+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$
(E) On a $\cos\left(\dfrac{7\pi}{10}\right) = -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Une chaîne de production fabrique des pièces mécaniques dont 80% sont bonnes (notations B) et 20% défectueuses (notation $\overline{B}$). Un test de contrôle rapide à la sortie de la chaîne permet d'accepter ou de refuser chaque pièce, mais celui ci est aléatoire. On note A l'événement "la pièce est acceptée", $\overline{A}$ l'événement "la pièce n'est pas acceptée" par le test rapide. On observe que :
Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 90%.
Si la pièce est défectueuse, elle n'est pas acceptée avec une probabilité de 85%.

Question 9

(A) $P(A \cap B) = 72\%$
(B) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 15\%$
(C) $P(A) = 75\%$
(D) La probabilité que la pièce soit bonne sachant qu'elle est acceptée est 72%
(E) La probabilité que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle n'est pas acceptée est 68%

Sur une ligne d'autobus, si on est contrôlé sans avoir de ticket, l'amende coûte 150€. La probabilité d'être contrôlé un certain jour est de $\frac{1}{10}$. Le fait d'être contrôlé un certain jour est indépendante du fait de l'être un autre jour.

Question 10

(A) La probabilité d'être contrôlé tous les jours pendant 5 jours consécutifs est de $\frac{1}{50}$

(B) La probabilité d'être contrôlé exactement une fois pendant 5 jours consécutifs est de $\frac{5\times 9^4}{10^5}$

(C) Un fraudeur qui n'achète jamais de ticket paye en moyenne, avec les amendes qu'il a de temps en temps, 15€ par jour

(D) Sur 80 jours consécutifs, un passager est contrôlé en moyenne 8 fois.

(E) Sur 80 jours consécutifs, la probabilité de ne jamais être contrôlé vaut 0.

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

Soit la fonction f 1-périodique, définie sur [0,1[par $f(t)=\cos\left(\pi a(1-2t)\right)$, où a est un nombre irrationnel quelconque.

On va calculer le développement en série de Fourier de $f(t)$

$$S(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(2\pi kt)+b_k\sin(2\pi kt)\right)$$

et en étudier quelques propriétés.

Question 11

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

(A) Sur]-1,0], on a $f(t)=\cos\left(\pi a(1+2t)\right)$

(B) La fonction f est paire

(C) On a sur [0,1] $f(t)\cos(2\pi kt)=\frac{1}{2}\left(\cos[2\pi t(k-a)+\pi a]+\sin[2\pi t(k+a)-\pi a]\right)$

(D) On a pour tout k $b_k=0$ et $a_0=\frac{\sin(\pi a)}{\pi a}$

(E) On a $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $a_k=\frac{\sin(\pi a)}{\pi}\frac{a}{k^2-a^2}$

On examinera la convergence de la série $S(t)$ selon t, on appliquera ce résultat en $t = \frac{1}{2}$, puis on appliquera l'identité de Bessel-Parseval.

Question 12

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique

(A) La série $S(t)$ converge pour tout t vers $f(t)$

(B) On a $\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)} = \dfrac{1}{a} + \sum_{1}^{\infty} \dfrac{2a}{a^2 - k^2}(-1)^k$

(C) On a $\int_0^1 f(t)^2 dt = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin(\pi a)}{4\pi a}$

(D) L'identité de Bessel-Parseval donne $\int_0^1 f(t)^2 dt = \sum_0^{\infty} a_k^{\,2}$

(E) On a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin(2\pi a)}{4\pi a} = \dfrac{\sin^2(\pi a)}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2a^2}{(a^2 - k^2)^2}\right)$

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit l'application linéaire $f : E \to E$ de matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note $\mathbf{X}$ la matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$\mathbf{I}$ est la matrice de l'application identique.

Question 13

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

(A) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\mathbf{AX} = \mathbf{X}$

(B) Le déterminant de $\mathbf{A}$ est nul.

(C) Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $P_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

(D) 2 est une valeur propre de $\mathbf{A}$

(E) Le système $\begin{cases} 4r - 3s + 2t = 0 \\ 6r - 5s + 4t = 0 \\ 4r - 4s + 4t = 0 \end{cases}$ admet $(1,2,1)$ comme unique solution.

On se propose de résoudre le système différentiel (S) $\begin{cases} x'(t)=4x(t)-3y(t)+2z(t) \\ y'(t)=6x(t)-5y(t)+4z(t) \\ z'(t)=4x(t)-4y(t)+4z(t) \end{cases}$ qui peut s'écrire matriciellement $\mathbf{X}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ en posant $\mathbf{X}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, avec les conditions initiales

(CI) $\begin{cases} x(0)=3 \\ y(0)=5 \\ z(0)=3 \end{cases}$. On pose $\begin{cases} u(t)= x(t) -y(t) +z(t) \\ v(t)= 2x(t) -y(t) \\ w(t)=-2x(t)+2y(t)-z(t) \end{cases}$

Question 14

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

(A) Si $(x(t),y(t),z(t))$ vérifient (S) alors $(u(t),v(t),w(t))$ vérifient $\begin{cases} u'(t)= 0 \\ v'(t)= v(t) \\ w'(t)=2w(t) \end{cases}$

(B) Si $(x(t),y(t),z(t))$ vérifient (S) et s'annulent pour $t=0$ alors pour tout réel t $(x(t),y(t),z(t))=(0,e^t-1,e^{2t}-1)$

(C) Si $(x(t),y(t),z(t))$ vérifient (S) et (CI) alors pour tout t on a $\begin{cases} u(t)=e^{2t} \\ v(t)=e^t \\ w(t)= 1 \end{cases}$

(D) L'unique solution de (S) avec les conditions initiales (CI) est $\begin{cases} x(t)= e^{2t}+e^t+1 \\ y(t)=2e^{2t}+e^t+2 \\ z(t)=2e^{2t} +1 \end{cases}$

(E) En choisissant convenablement les conditions initiales, il est possible d'avoir une solution de (S) formée de trois fonctions constantes

---

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.

On considère un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note *(Ox,Oy,Oz)* les axes correspondants.

Dans cet espace, on considère l'ensemble D de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1-t \\ y= t \\ z= 0 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$,

et l'ensemble Δ d'équation cartésienne $\begin{cases} y+z=2 \\ x =0 \end{cases}$

Pour le paramètre α fixé P_α est le plan d'équation cartésienne $\alpha x+y+z=2$.

Le vecteur $\vec{u}$ a pour composantes $(1,1,1)$. On rappelle que la distance d'un ensemble de points à un autre ensemble de points est le minimum de la distance d'un point de l'un à un point de l'autre.

Question 15

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.

(A) D et Δ sont deux droites orthogonales.
(B) Il existe un plan contenant D et Δ.
(C) Δ appartient à tous les plans P_α
(D) Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal en même temps aux vecteurs directeurs de D et Δ.
(E) Le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan P_{-2}

Question 16

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.

(A) L'intersection de P_{-2} et de D a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},0\right)$

(B) La plus petite distance d'un point de D à un point de Δ est $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(C) La distance d'un point du plan (xOy) de coordonnées $(x_0,y_0,0)$ à D est $\frac{|x_0+y_0-1|}{\sqrt{2}}$

(D) La distance au carré d'un point du plan (xOy) de coordonnées $(x_0,y_0,0)$ à Δ est : $x_0^2+2\left(1-\frac{y_0}{2}\right)^2$

(E) L'ensemble des points du plan (xOy) qui sont équidistants de D et de Δ a pour équation cartésienne $\begin{cases} x_0^2+2\left(1-\frac{y_0}{2}\right)^2=(x_0+y_0-1)^2 \\ z=0 \end{cases}$