On considère la fonction de variable réelle $f : x \mapsto e^{x\ln(1-1/x)}$. On se propose d'étudier cette fonction. On étudiera pour cela la fonction définie par $u(x) = x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ ainsi que dérivées u' et u''. On note D le domaine de définition des fonctions f et u.

Question 1

(A) On a $D =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

(B) Sur $\boldsymbol{D}$, $u'(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$

(C) Sur $\boldsymbol{D}$, $u''(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}$

(D) La limite de u' en $+\infty$ comme en $-\infty$ est 0.

(E) La fonction u' est négative sur D.

Question 2

(A) Sur chaque intervalle $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$, u est décroissante.

(B) Sur chaque intervalle $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$, f est croissante.

(C) Lorsque h tend vers 0, $\ln(1-h)$ équivaut à h.

(D) La limite de u en $+\infty$ comme en $-\infty$ est -1.

(E) La limite de f en $+\infty$ comme en $-\infty$ est 1.

Question 3

(A) La limite de u en 1^+ est 0.

(B) La limite de f en 1^+ est 1.

(C) La limite de $x\ln x$ en 0^+ est 1.

(D) La limite de u en 0^- est 0.

(E) La limite de f en 0^- est 1.

On étudie ici la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{e} - f(n)$

Question 4

(A) Quand n tend vers $+\infty$ on a $f(n) = \exp\left[-1 + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}\right]$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$

(B) Lorsque h tend vers 0, $e^h - 1$ équivaut à h.

(C) Quand n tend vers $+\infty$ un équivalent de u_n est $\frac{e}{2n}$

(D) Quand n tend vers $+\infty$, u_n tend vers 0.

(E) La série de terme général u_n est convergente.

Soient (H) l'équation différentielle homogène : $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$

(E_1) l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = t$

et (E_2) l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = e^{2t}\sin t$

Question 5

(A) La solution générale de (H) est $y(t) = e^{2t}(A\cos(t) + B)$

(B) Il existe une solution particulière de (E_1) de la forme $y(t) = t + a$

(C) Une solution de (E_1) est $\dfrac{5t+4}{25} + e^{2t}\cos(t)$

(D) La seule solution de (H) vérifiant $y(0) = y(1) = 0$ est la fonction nulle.

(E) La seule solution de (H) vérifiant $y(0) = y(\pi) = 0$ est la fonction nulle.

Question 6

(A) La dérivée seconde de $te^{2t}\cos(t)$ est $e^{2t}\left[(4+3t)\cos(t) + (2+4t)\sin(t)\right]$

(B) Il existe une solution de (E_2) de la forme $e^{2t}(A\cos(t) + B\sin(t))$

(C) Il existe une solution unique de (E_2) de la forme $k\,te^{2t}\cos(t)$

(D) La solution de (E_2) telle que $y(0) = y'(0) = 0$ est $\dfrac{1}{2}e^{2t}(t\cos(t) - \sin(t))$

(E) La solution générale de (E_2) est $e^{2t}(A\cos(t) + B\sin(t) - \dfrac{t}{2}\cos(t))$

On considère le polynôme $P(x) = x^6 + 1$. Nous allons calculer ses racines dans $\mathbb{C}$, et en déduire une factorisation complète de $P(x)$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Question 7

(A) Les points ayant pour affixes les racines de $P(x)$ forment un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

(B) On a la factorisation $P(x) = \prod_{k=0}^{5}(x - e^{ik\pi/3})$

(C) Si $\alpha = re^{i\theta}$ est une racine de $P(x)$, alors $\overline{\alpha} = re^{-i\theta}$ est aussi racine de $P(x)$

(D) Si $\alpha = re^{i\theta}$ est une racine de $P(x)$, alors $x^2 - r\cos(\theta)x + r^2$ divise $P(x)$

(E) La factorisation à l'aide de polynômes réels de $P(x)$ est :

$P(x) = (x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$

Soient les polynômes $Q(x)=\sqrt{3}x^3+2x^2-1$, et D(x)=$x^2+\sqrt{3}$ x+1. Nous allons calculer le reste de la division euclidienne de $Q(x)$ par $D(x)$ sous la forme :

$Q(x)=A(x)D(x)+R(x)$ avec $d^\circ(R)<2$, et en déduire les 3 racines de $Q(x)$

Question 8

(A) Le polynôme $D(x)$ divise le polynôme $Q(x)$

(B) On a $A(x)=x\sqrt{3}-2$

(C) On a $R(x)=\dfrac{1}{3}$

(D) L'unique racine réelle a de $Q(x)$ vérifie $\dfrac{4}{7}<a<\dfrac{3}{5}$

(E) Les racines de $Q(x)$ qui ne sont pas réelles sont $\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$ et $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

Alice et Bruno sont les seuls candidats à un examen. La probabilité de la réussite d'Alice est de 90%, et celle de Bruno est de 60%. Leurs réussites sont indépendantes.

On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre total de réussites à l'examen. X vaut donc 0 si tous les deux échouent, 1 si un seul des deux réussit, et 2 si tous les deux réussissent l'examen.

Question 9

(A) La probabilité d'avoir X=0 (les deux échouent) est 50%.

(B) La probabilité d'avoir X=2 (les deux réussissent) est 54%.

(C) La probabilité d'avoir X=1 (un seul réussit) est 36%.

(D) La probabilité qu'Alice ait réussi, sachant que X=1 est $\dfrac{6}{7}$

(E) La probabilité que X=1, sachant qu'Alice a réussi est $\dfrac{3}{7}$

Une usine fabrique des ampoules électriques. La durée de fonctionnement exprimée en années d'une ampoule électrique produite par cette usine est une variable aléatoire T de densité f avec $f(t)=2e^{-2t}$ pour $t\geq 0$, et $f(t)=0$ pour $t<0$.

Question 10

(A) La durée de vie moyenne d'une ampoule électrique est de 2 ans.

(B) L'écart type de la durée de vie d'une ampoule électrique est d'une demi année.

(C) La probabilité qu'une ampoule électrique dure plus d'un an est $\dfrac{1}{e}$

(D) Il est impossible qu'une amploule électrique dure plus de 4 ans.

(E) La probabilité qu'une ampoule dure plus de 2 ans, sachant qu'elle a déjà fonctionné 1 an est de $\frac{1}{e^2}$

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie électrique et génie civil.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie informatique.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Soit la fonction f, définie par $f : t \mapsto |\sin t|$

On demande de calculer son développement en série de Fourier de la forme

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt) \right)$$

et d'en étudier quelques propriétés.

Question 11

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) La fonction f est paire.

(B) La fonction f est dérivable en tout point.

(C) $a_0 = \frac{4}{\pi}$

(D) On a pour tout entier n strictement positif $a_n = \frac{4}{\pi(n^2 - 1)}$

(E) On a pour tout entier n strictement positif $b_n = \frac{4}{\pi(1 - n^2)}$

Question 12

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) On a $\int_0^{\pi} f(t)^2 \, dt = \frac{\pi}{2}$

(B) On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}$

(C) On a $2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

(D) La formule de Parseval s'écrit $\int_0^{\pi} f(t)^2\,dt = a_0^2 + \sum_{1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

(E) On a $\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$

Question 13

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

On considère un espace vectoriel **E** de dimension 3 muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Un endomorphisme f de **E** a pour matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base B. On pose $g=f$ - Id, de matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$ dans la base B , **I** étant la matrice de l'application identité de **E** notée Id .

(A) On a $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(B) On a $\mathbf{A}^3 = 3\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}$

(C) On a $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^3 = \mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + \mathbf{I}$

(D) On a $\mathbf{B}^3 = \mathbf{B}$

(E) **B** est la matrice d'une projection.

Question 14

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

(A) Le polynôme caractéristique de **A** est $P_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$

(B) Les valeurs propres de **A** sont {0 ;1 ;-2}.

(C) Un vecteur propre f de associé à la valeur propre –2 est le vecteur nul.

(D) $\vec{i} + \vec{j}$ est un vecteur propre f.

(E) $\mathbf{A}^2$ admet une valeur propre double.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

On considère un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Dans cet espace on considère l'origine O(0,0,0) et les points A(1,0,1), B(0,1,0).On note P le plan (OAB) et Q le plan (xOz).

L'intersection de P et Q est la droite Δ . On s'intéressera ensuite au cylindre (de révolution) d'axe et de rayon 1. Celui-ci sera noté Γ.

(A) Le plan P contenant les points A,O,B a pour équation $x - z = 0$
(B) $x - z = 0$ est l'équation d'une droite.
(C) Une équation de Q est $y = 0$
(D) Les plans P et Q sont parallèles.
(E) La distance d'un point $M(x, y, z)$ à la droite Δ est la somme des distances de M aux plans P et Q.

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

(A) La distance au carré de $M(x, y, z)$ au plan **P** a pour expression $\frac{(x-z)^2}{2}$
(B) La distance au carré de $M(x, y, z)$ à la droite Δ a pour expression $\frac{(x-z)^2}{2} + \frac{y^2}{2}$
(C) Le cylindre Γ d'axe Δ et de rayon 1 a pour équation $\frac{(x-z)^2}{2} + y^2 = 1$
(D) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$ est l'équation d'une sphère tangente à Γ
(E) L'intersection de Γ avec le plan (xOy) est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$