Soient les fonctions de variable réelle f, g définies par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1-x^2})$ et $g(x) = \text{Arcsin}(x)$
 On note D le domaine de définition de f

Question 1

- (A) Le domaine de définition de f est $D = [-1/2, +1]$
- (B) On a $f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - 2x}{1-x^2 + x\sqrt{1-x^2}}$
- (C) La dérivée de f s'annule pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (D) Sur D , f prend toutes les valeurs de l'intervalle $] -\infty, \ln(2)]$
- (E) La représentation graphique de f admet une tangente verticale d'équation $x = 1$

On se propose de calculer les développements limités de f et g en 0 à l'ordre 3.

Dans les développements limités qui suivent, la notation ε représente une fonction qui tend vers 0 en 0, et qui n'est pas nécessairement la même dans chaque formule.

Question 2

- (A) Le développement limité en 0 à l'ordre 4 de g' est $g'(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} + x^4 \varepsilon(x)$
- (B) Le développement limité en 0 à l'ordre 3 de g est $g(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$
- (C) On a le développement limité en 0 à l'ordre 3 : $\ln(1+u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \varepsilon(u)$
- (D) Le développement limité en 0 de f est $f(x) = x - x^2 + \frac{3x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)$
- (E) Pour avoir $f(x) - g(x) + ax^2 + bx^3 = x^3 \varepsilon(x)$, il faut $a = 1$, $b = \frac{-2}{3}$

On note (E_1) l'équation différentielle : $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = \sin t$

(E_2) l'équation différentielle : $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = e^t \cos(2t)$

et (H) l'équation homogène associée : $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$

On se propose de déterminer les fonctions réelles solutions de ces équations différentielles.

Question 3

- (A) Les solutions de (H) de la forme $y(t) = e^{rt}$ sont obtenues en prenant pour r les solutions de l'équation $r^2 - 2r + 5 = 0$.
- (B) La solution générale de (H) est $y(t) = A(e^t \cos 2t + e^t \sin 2t)$ avec A constante réelle.
- (C) $y(t) = C \cos t + D \sin t$ est solution de (E_1) si et seulement si $\begin{cases} 4C - 2D = 1 \\ 2C + 4D = 0 \end{cases}$
- (D) La solution générale de (E_1) est :

$$y(t) = Ae^t \cos 2t + Be^t \sin 2t + \frac{2 \cos t - \sin t}{10} \text{ avec } A, B \text{ constantes réelles.}$$

- (E) La solution de (E_1) vérifiant $y(0) = \frac{1}{10}$ et $y'(0) = \frac{1}{5}$ est : $y(t) = \frac{\cos t + 2 \sin t}{10}$

Question 4

- (A) Une solution particulière de (E_2) est $y(t) = e^t \cos 2t$
- (B) Une solution particulière de (E_2) est $y(t) = \frac{t e^t \sin(2t)}{4}$
- (C) La solution générale de (E_2) est $y(t) = A(e^t \cos 2t + e^t \sin 2t) + \frac{t e^t \sin(2t)}{4}$ avec A constante réelle.
- (D) L'unique solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ est $y(t) = \frac{t e^t \sin(2t)}{4}$
- (E) Il existe une unique solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$
-

Soit la fraction rationnelle : $F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^5 + 3x^4 + 1}{(x-1)(x^3 + 1)} = \frac{x^5 + 3x^4 + 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$. Pour répondre aux questions, on va effectuer la division euclidienne de N par D , puis factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$, et calculer la décomposition en éléments simples de la partie fractionnaire.

Question 5

- (A) La partie entière (ou polynomiale) de $F(x)$ est $P(x) = x + 4$
- (B) La partie fractionnaire de $F(x)$ est $R(x) = F(x) - P(x) = \frac{4x^3 + 2x + 5}{D(x)}$
- (C) Trois des racines de $D(x)$ forment dans le plan complexe un triangle rectangle isocèle
- (D) $R(x)$ se décompose en trois éléments simples réels $R(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}$
- (E) Un des éléments simples de $R(x)$ est $\frac{-1-x}{3(x^2-x+1)}$

On calcule ici une primitive de $F(x)$, puis l'intégrale $I = \int_0^{1/2} F(x) dx$

Question 6

- (A) On a $\int_0^{1/2} \left(\frac{5}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = -4 \ln 2 - \ln 3$
- (B) On a $\operatorname{Arctan} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{-\pi}{3}$
- (C) Une primitive de $\frac{1}{x^2 - x + 1}$ est $\operatorname{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)$
- (D) Une primitive de $\frac{x-1}{x^2 - x + 1}$ est $-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1)$
- (E) On a $I = \int_0^{1/2} F(x) dx = \frac{17}{8} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(3)$
-

Dans une urne il y a 8 boules indiscernables au toucher. Il y a trois boules rouges numérotées 1, 2, 3, deux boules vertes marquées 4, 5 et trois boules bleues marquées 6, 7, 8. On tire une seule boule de l'urne au hasard (tirage équiprobable) et on note R l'événement : la boule tirée est rouge, V : la boule tirée est verte, B : la boule tirée est bleue, I : la boule tirée porte un numéro impair.

Question 7

- (A) La probabilité $P(R \cap I)$ de tirer une boule rouge et de numéro impair est $\frac{1}{4}$
- (B) Les événements V et I sont indépendants.
- (C) Les événements R et I sont indépendants.
- (D) Les événements R et V sont indépendants.
- (E) La probabilité $P(R \cup I)$ de tirer une boule rouge ou une boule de numéro impair est $\frac{3}{4}$

Toujours avec la même urne on procède à 3 tirages successifs. À chaque tirage on note les caractéristiques de la boule tirée puis on la replace dans l'urne (tirage avec remise).

Question 8

- (A) La probabilité de tirer d'abord une rouge, puis une verte puis une bleue est $\frac{9}{256}$
- (B) La probabilité de tirer trois boules de trois couleurs différentes est $\frac{27}{256}$
- (C) La probabilité de tirer exactement une verte sur les trois tirages est $\frac{1}{4}$
- (D) La probabilité de tirer exactement trois vertes est $\frac{1}{64}$
- (E) La probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{62}{512}$

Soit l'application f de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ vers $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ définie par $f(z) = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$. On note $Z = f(z)$. Dans le

plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points d'affixes respectives $z, Z, \frac{-5}{2}i, 2i$ sont notés m, M, A, B , et on définit ainsi l'application ponctuelle F par $M = F(m)$. On note $C(U, r)$ le cercle de centre U et de rayon r .

Soit E_1 l'ensemble des points m tels que $M \in (0, x)$ c'est à dire l'origine ou un point M tel que $\text{Arg}(Z) = 0 \pmod{\pi}$

Question 9

- (A) On a $\text{Arg}(Z) = (\overrightarrow{Am}, \overrightarrow{Bm})$
- (B) E_1 est le cercle de diamètre $[A, B]$, privé du point B .
- (C) Pour tout $r > 0$, l'image par F de $C(B, r)$ est $C(B, 3/r)$
- (D) Le cercle $C(B, 3)$ est invariant par F
- (E) Une équation de E_1 est $x^2 + y^2 + \frac{y}{2} - 5 = 0$

Vérifier qu'il existe deux points C et D du plan invariants par F , d'affixes respectives ω_1, ω_2 que l'on calculera. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$

Question 10

- (A) On a $\omega_1 = -i$ et $\omega_2 = 2i - 3$
(B) Le cercle de diamètre $[C, D]$ est invariant par F
(C) L'image de la droite (CD) par F est le cercle de diamètre $[C, D]$
(D) On a $x = \frac{X - 2Y}{X^2 + Y^2 - 4Y + 4}$
(E) L'image par F de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est le cercle $C(\Omega, 9)$ privé du point B, avec Ω d'affixe $-9 + 2i$
-

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie électrique et génie civil.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie informatique.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

On note f la fonction de période 2π , avec $\begin{cases} f(x) = x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ f(x) = 0 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$ et

sa série de Fourier : $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

On calculera les coefficients de cette série, puis on calculera $S(0)$

Question 11

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) Une primitive de $x \cos(kx)$ est $\frac{1}{k} x \sin(kx) + \frac{1}{k^2} \cos(kx)$

(B) On a $a_0 = \frac{\pi}{4}$

(C) On a $a_{2p} = 0$, $a_{2p+1} = \frac{-2}{\pi(2p+1)^2}$

(D) On a $b_k = \frac{(-1)^k}{k}$

(E) On a $\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{16}$

On pose $g(x) = f(x) + f(-x)$. Son développement en série de Fourier se trouve sans calcul à partir de celui de f . On applique la formule de Parseval au développement en série de Fourier de g pour

calculer $T = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ puis $U = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Question 12

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

- (A) On a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$
- (B) $g(x)$ est une fonction de période π
- (C) On a $g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$ (égalité en tout point)
- (D) La formule de Parseval appliquée à g donne $T = \frac{\pi^4}{48}$
- (E) On a $U = \frac{\pi^4}{90}$

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

On considère un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension 3 muni d'une base $\mathbf{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Un endomorphisme f de $\mathbf{E}$ a pour matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathbf{B}$. On pose $g = f - Id$,

de matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$ dans la base $\mathbf{B}$, $\mathbf{I}$ étant la matrice de l'application identique notée Id dans $\mathbf{E}$

Question 13

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

- (A) La matrice $\mathbf{B}$ a pour déterminant 0.
- (B) Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $P_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 - 5x + 2$
- (C) La matrice $\mathbf{A}$ admet une valeur propre double et une valeur propre simple.
- (D) La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.
- (E) 2 est une valeur propre double de $\mathbf{A}$

Question 14

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

(A) f admet comme sous espace propre associé à la valeur propre 1 l'espace vectoriel de dimension un ayant pour base $(-\vec{i} + \vec{j})$

(B) La matrice de f dans la base $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} - \vec{k}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- (C) On a $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$
- (D) On a $\mathbf{A}^4 = \mathbf{I} + 4\mathbf{B} + 8\mathbf{B}^2 + 4\mathbf{B}^3 + \mathbf{B}^4$
- (E) $\mathbf{A}^4 = \mathbf{I} + 15\mathbf{B}$

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)

Dans un espace euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \overset{\cdot}{i}, \overset{\cdot}{j}, \overset{\cdot}{k})$ on considère la partie Δ de

représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$ pour un paramètre t sur $\mathbf{R}$, et la droite (Oz) . Pour un point

M et une droite D de l'espace, on note $d^2(M, D)$ le carré de la distance de M à la droite D . Pour deux parties non vides U et V de l'espace on note $d^2(U, V)$ le minimum (s'il existe) du carré de la distance d'un point M de U et d'un point N de V .

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)

- (A) Δ est une droite, d'équations $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$
- (B) Le plan contenant (Oz) et perpendiculaire à Δ a pour équation cartésienne $x + 2y = 0$
- (C) L'intersection du plan contenant (Oz) et perpendiculaire à Δ avec Δ est le point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$
- (D) Le carré de la distance de l'origine à un point M de Δ de paramètre t est $d^2(O, M) = 5t^2 + 1$
- (E) Le carré de la distance de (Oz) à Δ est $\frac{4}{5}$

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)

- (A) Le carré de la distance d'un point M de coordonnées (x, y, z) et d'un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est $d^2(M, P) = \frac{(ax + by + cz + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$
- (B) Les plans P_1 d'équation $2x + y = 2$ et P_2 d'équation $z = 0$ sont perpendiculaires.
- (C) Le carré de la distance d'un point M de coordonnées (x, y, z) et de Δ est $d^2(M, \Delta) = \frac{(2x + y - 2)^2}{5} + x^2 + y^2$
- (D) L'ensemble H des points M de coordonnées (x, y, z) équidistants de Δ et de (Oz) a pour équation cartésienne $\frac{(2x + y - 2)^2}{5} - x^2 - y^2 + z^2 = 0$
- (E) L'intersection de l'ensemble H avec le plan d'équation $y = 2$ est une ellipse.