On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x - \ln(\operatorname{ch} x)$ (on rappelle que la fonction ch est définie par : $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$). On se propose de déterminer quelques propriétés de *f*.

Question 1

(A) La fonction ch est paire.

(B) Un développement limité de la fonction ch à l'ordre 4 au voisinage de 0 est: $\operatorname{ch} x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

(C) Un développement limité de la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est: $\ln(1+h) = 1 - h + \dfrac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

(D) Un développement limité de la fonction f à l'ordre 4 au voisinage de 0 est: $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

(E) La courbe représentative de f admet la première bissectrice comme tangente à l'origine.

Question 2

(A) La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est telle que $f'(x) = 1 - \operatorname{th} x$

(B) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(C) La fonction *f* peut s'écrire $f(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$

(E) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Pour un entier naturel *n* on considère les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$. On se propose de calculer I_n en fonction de *n*

Question 3

(A) Une primitive de $\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)}$ est $\ln(x^2+1)$

(B) L'intégrale I_1 diverge.

(C) En intégrant par parties, on a pour $n \geq 1$, $I_n = \left[\dfrac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^\infty + 2n \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}$

(D) On a la relation de récurrence $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n$

(E) $I_n = \dfrac{(2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2} \dfrac{\pi}{2}$

Pour calculer autrement les intégrales $I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$ on pose $x = \tan\theta$. On note $J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\theta \, d\theta$

Question 4

(A) Avec ce changement de variables, $I_n = J_{2n}$

(B) Avec une intégration par parties en prenant $f'(\theta) = \cos\theta$ et $g(\theta) = \cos^{p-1}\theta$, on trouve que $pJ_p = (p-1)J_{p-2}$

(C) $J_{2n} = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}\frac{\pi}{2}$

(D) $I_n = \frac{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times 3\times 1}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}\frac{\pi}{2}$

(E) $I_n = \frac{(2n-2)!}{4^{(n-1)}\left((n-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2}$

On se propose de résoudre sur l'intervalle $I =]0,2[$ l' équation différentielle

$$\text{(E1)} \qquad x(2-x)y'(x) + (1-x)y(x) = 0$$

On notera $y_1(x)$ la solution de (E1) telle que $y_1(1) = 1$

On rappelle que la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ admet une bijection réciproque notée Arcsin qui a pour dérivée sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Question 5

(A) Une primitive de $\frac{x-1}{x(2-x)}$ est $\frac{1}{2}\ln[x(2-x)]$

(B) On a la décomposition $\frac{x-1}{x(2-x)} = -\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2x}$

(C) On a $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$

(D) Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ est $\text{Arcsin}(2-x)$

(E) La solution générale de (E1) est $y(x) = y_1(x) + K$ avec K constante réelle.

On se propose de résoudre sur l'intervalle $I =]0,2[$ l' équation différentielle

$$\text{(E2)} \qquad x(2-x)y'(x) + (1-x)y(x) = 1$$

On notera $y_2(x)$ la solution générale de (E2). On cherchera une solution particulière de (E2) sous la forme $y(x) = C(x)y_1(x)$.

On rappelle que la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$ admet une bijection réciproque notée Arccos .

Question 6

(A) On a $C'(x)=\sqrt{x(2-x)}$
(B) On a $C(x)=\text{Arcsin}(x-1)+K$ avec K réel
(C) On a $\text{Arccos}(1-x)=\text{Arcsin}(x-1)+\dfrac{\pi}{2}$
(D) Une solution particulière de (E2) est $\dfrac{\text{Arccos}(x-1)}{\sqrt{x(2-x)}}$
(E) On a $y_2(x)=1+Ky_1(x)$ avec K réel

Soit un réel $\theta \in [0,\pi/2]$, et les polynômes $P(X)=X^2-2\cos(\theta)X+1$ et $Q(X)=P(X^4)$. On vous demande de calculer les racines complexes de P et Q, d'en déduire une factorisation de Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$, en fonction de $S=\sin\left(\dfrac{\theta}{4}\right)$ et $C=\cos\left(\dfrac{\theta}{4}\right)$. Pour les représentations géométriques, on associe à chaque nombre complexe $z=x+iy$ le point du plan (xOy) de coordonnées (x,y)

Question 7

(A) Les racines de P sont $\alpha=e^{i\theta}$ et $\beta=-e^{i\theta}$
(B) Les racines de l'équation $X^4=e^{i\theta}$ sont représentées géométriquement par les sommets d'un carré inscrit dans le cercle trigonométrique.
(C) Si $e^{i\varphi}$ est racine de Q, alors $X^2-2\cos(\varphi)X+1$ divise Q.
(D) Une des racines de Q a pour argument $\dfrac{\theta+\pi}{4}$
(E) On a $Q(X)=(X^2-2SX+1)(X^2+2SX+1)(X^2-2CX+1)(X^2+2CX+1)$

Dans la suite on appelle θ_0 le réel pour lequel les racines de Q sont représentées géométriquement par les sommets d'un octogone régulier.
Pour $\theta=\theta_0$, on va alors calculer sous forme de radicaux, le nombre $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, la longueur a du côté de l'octogone régulier, et l'aire s de cet octogone régulier.

Question 8

(A) La rotation de centre O d'angle de mesure $\dfrac{\theta}{8}$ transforme les points représentant les racines de $X^4=e^{i\theta}$ en ceux représentant les racines de $X^4=e^{-i\theta}$
(B) On a $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$
(C) On a $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}$
(D) La longueur a du côté de l'octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique vaut $a=2^{1/4}\sqrt{\sqrt{2}-1}$
(E) L'aire s de l'octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique vaut $s=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

Dans une production de résistances on note $p \in]0,1[$ la proportion de résistances défectueuses. On tire au hasard, indépendamment les unes des autres, n résistances. Les résultats sont les variables aléatoires indépendantes X_k pour $1 \le k \le n$, où X_k vaut 1 si le k-ième tirage est défectueux et 0 s'il ne l'est pas. On a donc $P(\{X_k = 1\}) = p$ et $P(\{X_k = 0\}) = q = 1 - p$. On note $S_n = X_1 + ... + X_n$ le nombre total de résistances défectueuses du tirage.

Question 9

(A) On a $P(\{S_n = k\}) = p^k q^{n-k}$ pour $0 \le k \le n$

(B) Sachant que $S_2 = 1$, la probabilité que $X_1 = 1$ est $\dfrac{p}{2}$.

(C) On a $\mathrm{Var}(X_k) = p^2$

(D) On a $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1)$

(E) On a $P(S_n = 2) = \dfrac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}$

Pour n grand, le théorème de la limite centrale permet d'approcher la loi de S_n par une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. On rappelle que si la variable aléatoire Y suit la loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0,1)$

la probabilité que $-1{,}96 < Y < 1{,}96$ est de 95%,

la probabilité que $Y < 1$ est de 84%

Les valeurs de ces seuils sont arrondies à 10^{-2} près.

On estime la proportion inconnue p par la variable aléatoire $Z = \dfrac{S_n}{n}$.

Question 10

(A) La loi de S_n est approchée par la loi $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$

(B) On prend $n = 100, p = \dfrac{1}{2}$. Pour que $P(S_n < a) = 84\%$, il faut avoir $a = 55$

(C) La variance de Z est pq

(D) On prend $p = 0{,}03$. Pour avoir $P(\{|Z - p| < 0{,}01\}) \ge 95\%$, il faut choisir $n > 149$

(E) La loi de $Z - p$ est approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{\sqrt{pq}}{n}\right)$

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie électrique et génie civil.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie informatique.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

Soit la fonction f de période 2π, paire, définie par

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2}{\pi}(\pi - x) \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi$$

On va calculer son développement en série de Fourier

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

et en étudier quelques propriétés. On pose $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)$. On aura à calculer et comparer les valeurs $f(\pi)$ et $S(\pi)$.

Question 11

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) On a $\quad n,\ b_n = 0$ et $a_0 = \frac{3}{4}$

(B) Une primitive de $x\cos(nx)$ est $\frac{-x\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}$

(C) On a $a_n = \frac{u_n}{n^2\pi^2}$ pour $n > 0$

(D) On a $a_3 = \frac{4}{9\pi^2}$

(E) On a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u_n}{n^2} = \frac{3\pi^2}{16}$

Dans cette question, on considère la fonction g réelle paire de période 2π, définie par

$$g(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x \quad \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

On exprimera $g(x)$ en fonction de $f(x+\pi)$ et on en déduira son développement en série de Fourier

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)\right)$$

Il faudra appliquer ensuite l'égalité de Parseval à ce développement.

Question 12

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) Il existe une constante C telle que $g(x) = C + f(x+\pi)$

(B) On a

(C) La relation de Parseval s'écrit ici $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(x)^2 dx = \alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$

(D) La relation de Parseval donne $\frac{1}{6} = \alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$

(E) On a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{n^4} = \frac{5\pi^4}{384}$

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ muni du repère $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit l'application linéaire $f : E \to E$ de matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note **X** la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Question 13

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

(A) La matrice **A** est de rang 3.
(B) Le déterminant de la matrice **A** est 0.
(C) L'équation $\mathbf{AX}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ admet pour unique solution $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
(D) $\vec{i}+\vec{j}$ est un vecteur propre de f
(E) La matrice **A** est diagonalisable.

On note maintenant $g : E \to E$ l'application linéaire de matrice $\mathbf{B}=\mathbf{I}+\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. **I** est la matrice de l'identité de E

Question 14

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

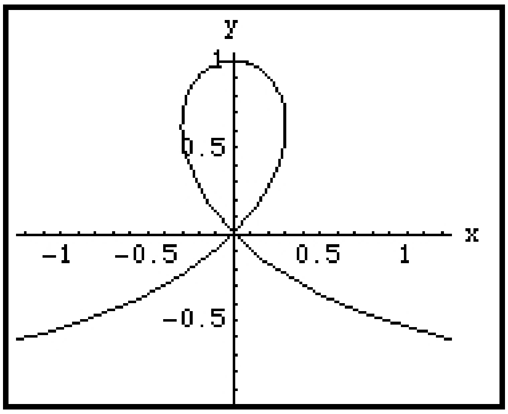
(A) $\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(B) $\mathbf{B}^2=\mathbf{I}+2\mathbf{A}^2$
(C) L'inverse de **B** est $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{A}^2$
(D) La matrice **B** est de rang 3.
(E) Le vecteur nul est vecteur propre pour g.

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)

On se propose de trouver quelques propriétés de la courbe C dont la représentation paramétrique dans un repère orthonormé du plan est : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t)=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$. On note M(t) un point de la courbe C associé au paramètre t.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)



(A) Pour tout t, on a: $-1< x(t)\leq 1$
(B) La fonction y admet un maximum relatif pour $t=-\sqrt{-2+\sqrt{5}}$
(C) La courbe C est symétrique par rapport à l'axe *(y'y)*
(D) La courbe C a l'allure de la figure ci-contre
(E) La courbe C admet une asymptote horizontale d'équation y=-1

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)

(A) À l'origine, la courbe C admet un point double.
(B) À l'origine, la courbe C admet une tangente de pente $t=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$
(C) Si la droite d'équation $ax+y+c=0$ coupe la courbe C en trois points distincts, $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$, alors les réels t_1, t_2, t_3 sont les trois racines de l'équation du troisième degré $t^3+(a-c)t^2-t-a-c=0$
(D) Si trois points distincts $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ de C sont alignés, alors, $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-1$,
(E) Les points de C associés aux paramètres 0, $\dfrac{-1}{2}$, et 2 sont alignés.