

### Question 1

On considère un bâtiment du Génie Civil schématisé sur la **figure 1**, constitué d'une dalle (2) de largeur  $2L$  et d'épaisseur  $b$  (dans la direction  $\vec{x}$ ) et d'un corps de bâtiment (1), supposés parfaitement rigides et encastrés entre eux. Le tout est placé sur un sol meuble (3). Pour obtenir l'action du sol (3) sur la dalle (2), on utilise un modèle (appelé modèle de fondation de Winkler) : le sol est remplacé par une répartition de ressorts de raideur  $k$  entre la dalle (2) et un support rigide (4), voir **figure 2** ; en un point  $M$  quelconque sous la dalle, un déplacement vertical  $u$  de ce point par rapport au support rigide conduit à une pression en  $M$  (action du ressort sur la dalle) de valeur  $p = -ku$ . La position du point  $M$  est donnée sur la **figure 1** :  $\vec{OM} = y\vec{y}$  avec  $-L \leq y \leq L$

On suppose que seuls la pesanteur et le sol (3) agissent sur (1+2). On note  $m$  la masse de l'ensemble (1+2) et  $G$  son centre de masse. L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g\vec{z}$  avec  $g > 0$ . La position de  $G$  est donnée sur la **figure 1** :  $\vec{OG} = e\vec{y} + h\vec{z}$

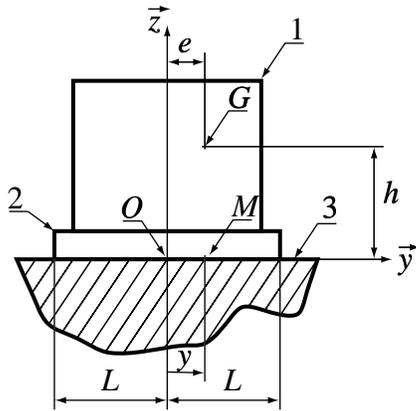


Figure 1

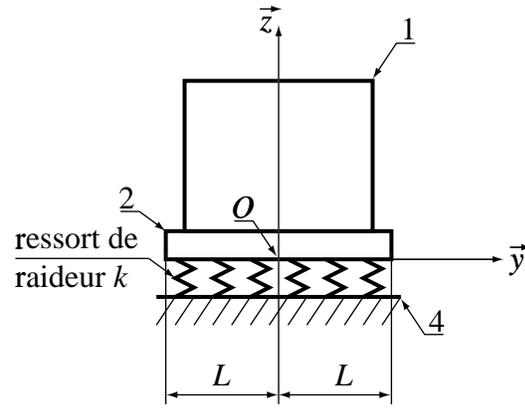


Figure 2

Le mouvement de l'ensemble (1+2) par rapport à (4) est donné par un torseur dont le moment est le champ de vecteurs déplacement, et la résultante le vecteur rotation. On le suppose de la forme (donné au point  $O$ ) :

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{array}{l} \omega \vec{x} \\ u_0 \vec{z} \end{array} \right\}_O$$

(A) Le déplacement en  $M$  de (1+2) par rapport à (4), suivant la verticale, est

$$\vec{U}_{M \cdot \vec{z}} = u_0 + \omega y$$

(B) Le travail de la pesanteur exercée sur (1+2) dans le mouvement précédent est  $-mg(u_0 + \omega e)$

(C) Si  $e = 0$ , le déplacement vertical maximal, en valeur absolue, le long de la dalle est

$$\frac{m g}{2 k L b}$$

(D) La rotation du bâtiment sous l'action de la pesanteur est

$$\omega = -\frac{3 m g e}{2 k b L^3}$$

(E) Si  $e \geq 0$ , la pression maximale, en valeur absolue, sous la dalle (2) est

$$p_{\max} = \frac{m g}{2 k b L} \left(1 + 3 \frac{e}{L}\right)$$

## Question 2

On considère le système dont le schéma est décrit sur la **figure 3**, qui est un dispositif de propulsion de chariots de manutention utilisés dans un atelier automobile.

Il est constitué tout d'abord d'un arbre de propulsion (1), de diamètre  $D$ , en liaison pivot par rapport au bâti (0) d'axe de direction  $\vec{x}$ . Sa vitesse de rotation par rapport au bâti est  $\omega_e \vec{x}$ , *supposée constante*. Le chariot à déplacer, de masse  $M$ , est attaché au solide (5). Le solide (5) est en liaison glissière par rapport au bâti, de direction  $\vec{x}$ . Sa vitesse de translation est notée  $V \vec{x}$ . Le porte-galet (3) est en liaison glissière par rapport à (5), de direction verticale  $\vec{z}$ . Un galet (2), de diamètre  $d$ , est en liaison pivot par rapport à (3), de direction  $\vec{u}$ . La vitesse de rotation de (2) par rapport à (3) est  $\omega_{2/3} \vec{u}$ . Enfin, entre (3) et (5) on trouve un ressort de compression (4) qui maintient tout le galet (2) en contact ponctuel avec l'arbre (1) au point noté  $I$ .  $\alpha$  est l'angle que forme  $\vec{u}$  avec  $\vec{x}$  et les repères  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$  sont orthonormés directs.

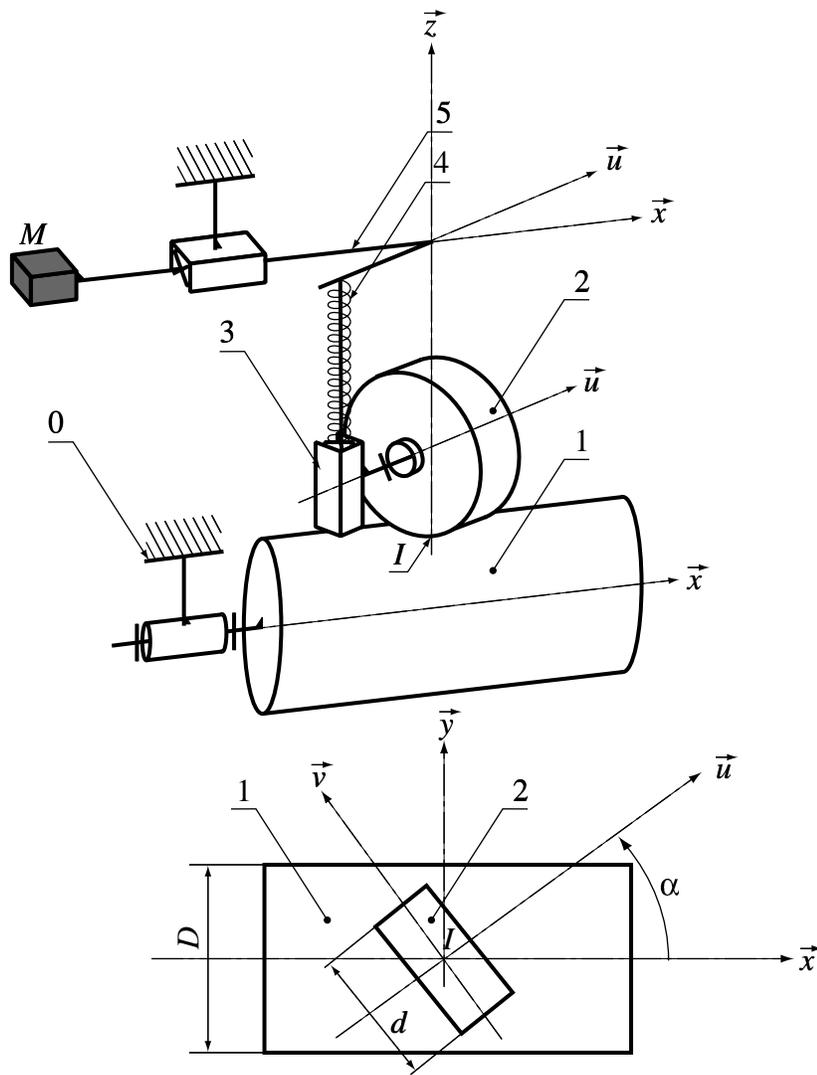


Figure 3

- (A) On dit que (2) roule sans glisser sur (1) au point  $I$  si  $\vec{V}(I, 1/0) + \vec{V}(I, 2/0) = \vec{0}$
- (B) Les accélérations galiléennes de deux points,  $M_1$  et  $M_2$ , appartenant à un même solide ( $S$ ), sont reliées par la relation suivante

$$\vec{A}(M_1, S/0) = \vec{A}(M_2, S/0) + \vec{V}(M_2, S/0) \wedge \vec{\Omega}(S/0)$$

où  $\vec{\Omega}(S/0)$  est la résultante du torseur cinématique du solide ( $S$ ) dans son mouvement par rapport à (0).

- (C) On note  $\vec{M}_{M_1}(S_1 \rightarrow S_2)$  et  $\vec{M}_{M_2}(S_1 \rightarrow S_2)$  respectivement, les moments du torseur de l'action mécanique du solide ( $S_1$ ) sur le solide ( $S_2$ ) aux points  $M_1$  et  $M_2$ . Ces deux moments sont reliés entre eux par la relation

$$\vec{M}_{M_1}(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{M}_{M_2}(S_1 \rightarrow S_2) + M_1 \vec{M}_2 \wedge \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$$

- (D) Pour un mécanisme à mobilité utile égale à 1, d'une part, et n'ayant que des liaisons parfaites, d'autre part, on peut dire que la puissance à l'entrée du mécanisme est égale à la puissance à la sortie du mécanisme.
- (E) Si le torseur des actions mécaniques du solide (1) sur le solide (2) et le torseur cinématique du mouvement de (2) par rapport à (0) sont respectivement

$$\mathcal{F} = \underset{I}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{b} \end{array} \right\}} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{v} \end{array} \right\}}$$

alors la puissance des actions mécaniques de (1) sur (2) dans le mouvement de (2) par rapport à (0) est  $\mathcal{P} = \vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{b} \cdot \vec{\omega}$

### Question 3

On reprend le système étudié dans la **question 2**.

- (A) La vitesse de (2) par rapport à (0) au point  $I$  est  $\vec{V}(I, 2/0) = V\vec{x} + \frac{1}{2}d \omega_{2/3} \vec{v}$
- (B) La vitesse de (2) par rapport à (0) au point  $I$  est  $\vec{V}(I, 2/0) = 2V\vec{x} + d \omega_{2/3} \vec{v}$
- (C) Si (2) roule sans glisser sur (1) au point  $I$ , la vitesse de rotation de (2) par rapport à (3) est

$$\omega_{2/3} = -\frac{D}{d \cos \alpha} \omega_e$$

- (D) Si (2) roule sans glisser sur (1) au point  $I$ , la vitesse du centre de masse de (5) par rapport à (0) est  $\frac{d}{2} (\sin \alpha) \omega_e \vec{x}$
- (E) Que (2) roule sans glisser sur (1) ou non, la vitesse de rotation de (2) par rapport à (1) est  $\omega_{2/3} \vec{u} - \omega_e \vec{x}$

### Question 4

On reprend le système étudié dans les **questions 2** et **3**;  $\alpha$  est toujours l'angle que forme  $\vec{u}$  avec  $\vec{x}$ . Un dispositif de réglage, non représenté sur la **figure 3**, permet de faire varier la valeur de  $\alpha$  continûment en fonctionnement, de 0 à  $\pi/4$ ; en particulier, on suppose que la loi d'évolution de  $\alpha$  en fonction du temps est celle de la **figure 4** ( $\tau$  est le temps de montée).

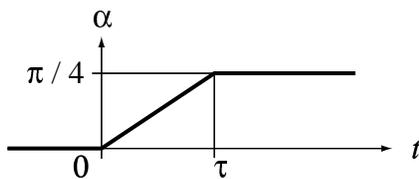


Figure 4

On appelle  $\mu$  le coefficient de frottement de Coulomb au contact entre (1) et (2), et  $P \vec{z}$ , l'action du ressort (4) sur (5). On néglige les masses (et donc les inerties) de (2), (3), (4) et (5) devant la masse  $M$  du chariot.

- (A) Si (2) roule sans glisser sur (1), avec une vitesse  $\omega_e$  constante et un angle  $\alpha$  qui peut varier, l'accélération du centre de masse de (5) est

$$-\frac{1}{2} D (1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{dt} \omega_e \vec{x}$$

- (B) L'effort de (1) sur (2) au point  $I$ , a une composante sur l'axe  $\vec{z}$  de valeur  $P$
- (C) Si le coefficient de frottement est nul ( $\mu = 0$ ), le bâti (0) exerce sur (5) le torseur d'action mécanique

$$I \left[ \begin{array}{c} -P \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right]$$

- (D) S'il y a glissement en  $I$ , alors la partie tangentielle des actions de (2) sur (1) en  $I$  (c'est-à-dire dans le plan  $(\vec{x}, \vec{u})$ ) est supérieure en norme à  $|\mu P|$ .
- (E) S'il y a glissement en  $I$ , alors la partie tangentielle des actions de (1) sur (2) en  $I$  est de sens opposé à celui de la vitesse en  $I$  de (2) par rapport à (1),  $\vec{V}(I, 2/1)$ .

### Question 5

On reprend le système étudié dans la **question 3**, en considérant uniquement l'arbre (1) en liaison pivot avec le bâti. On suppose qu'il est réalisé comme une poutre creuse de longueur  $L$ , de section circulaire constante, comme décrit sur la **figure 5**; le diamètre intérieur est noté  $D_i$ , et le diamètre extérieur est noté  $D_e$ . Il est réalisé en acier de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ .

La liaison pivot avec le bâti est réalisée par un montage de deux roulements à rouleaux coniques. Le premier est modélisé par une rotule de centre  $A_1$ , et le deuxième, par une linéaire annulaire de centre  $A_2$  et d'axe  $\vec{x}$  (voir **figure 5**). Le chargement dû à la pièce (2) est ici

modélisé par un glisseur vertical de résultante  $-Q\vec{z}$  au point  $I$  dont la position est repérée par la distance  $h$ .

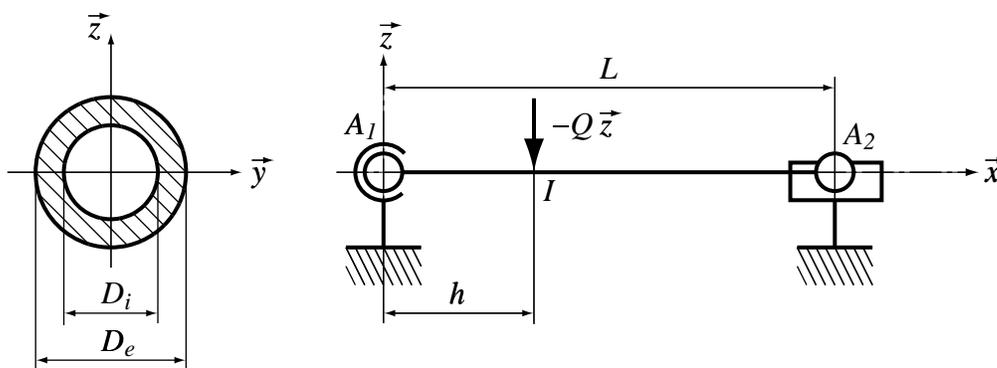


Figure 5

- (A) La matrice de l'opérateur d'inertie de (1) en un point quelconque de son axe de rotation peut s'écrire, dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , sous la forme

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -G \\ 0 & -G & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- (B) Le solide (1) est équilibré statiquement et dynamiquement par rapport à son axe de rotation.
- (C) Les deux principaux éléments constituant un acier sont le fer et le manganèse.
- (D) Un acier a un module d'Young compris entre 100 GPa et 500 GPa.
- (E) On peut modifier le module d'Young d'un acier par un traitement thermique.

### Question 6

On reprend l'arbre (1) en liaison pivot avec le bâti de la **question 5**, et son chargement représenté sur la **figure 5**.

- (A) L'action du bâti sur l'arbre(1) au point  $A_1$  est  $(1 - \frac{h}{L})Q \vec{z}$
- (B) L'arbre (1) est soumis à de la flexion pure.
- (C) Avec un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli pour l'axe, l'angle de rotulage au droit du point  $A_1$  est

$$\frac{32}{\pi E} \frac{Q h^2}{D_e^4 - D_i^4} \left(1 - \frac{h}{3L} - \frac{2L}{3h}\right)$$

(D) Avec un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli pour l'axe, la flèche en  $I$  vaut

$$\frac{64}{\pi E} \frac{Q h^3}{D_e^4 - D_i^4} \left(\frac{2}{3} - \frac{h}{3L} - \frac{L}{3h}\right)$$

(E) La contrainte axiale est maximale en un point appartenant à la section où la flèche est maximale.

### Question 7

On considère le système modélisé sur la **figure 6** par un ensemble constitué d'une masse  $m$ , et d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Il s'agit d'un système limiteur de vibration. Comme indiqué sur la **figure 6**, il est placé sur un support (1) et la masse  $m$  n'a qu'un seul mouvement possible par rapport au support : une translation verticale suivant  $\vec{z}$ . Le support (1) a lui-même un mouvement de translation verticale par rapport au référentiel galiléen ; sa position est donnée par son altitude

$$z_1(t) = a \sin \frac{t}{\tau} \quad \text{pour } t \geq 0$$

où  $\tau$  est une durée constante, et  $a$ , une longueur constante appelée amplitude de  $z_1$ . L'altitude de la masse  $m$  par rapport au référentiel galiléen sera notée  $z$ .

L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \vec{z}$  avec  $g > 0$ .

Les conditions initiales correspondent à un état statique pour lequel  $z_1(t) = 0$ ,  $z(t) = z_0$ ,  $\frac{dz}{dt} = 0$ , pour  $t \leq 0$ ,  $z_0$  étant une constante.

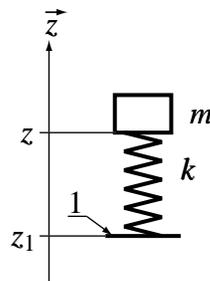


Figure 6

(A) L'action du ressort sur le support (1) est  $k(z - z_1 - l_0) \vec{z}$

(B) L'action du ressort sur le support (1) est  $k(l_0 - z + z_0) \vec{z}$

(C) La position initiale est  $z_0 = l_0 - \frac{m}{k}g$

(D) Le mouvement pour  $t \geq 0$  peut s'écrire sous la forme

$$z(t) = \alpha \left[ \sin \frac{t}{\tau} + \beta \sin(\omega t) \right] + z_0$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\omega$  sont des constantes.

(E) Si  $\beta$  est très petit, l'amplitude de  $z - z_0$  est l'amplitude de  $z_1$  divisée par le coefficient

$$1 - \frac{m}{k \tau^2}$$

### Question 8

On s'intéresse à une motocyclette qui roule en ligne droite, sur un terrain parfaitement plat. La **figure 7** présente le problème et sa modélisation. L'ensemble pilote et moto sans les roues est supposé former un solide rigide (3) (on suppose donc les suspensions très raides pour simplifier). Il est en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{x})$  avec la roue avant (2) et en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{x})$  avec la roue arrière (1). Ces liaisons sont supposées parfaites. On note  $m$  la masse, et  $G$  le centre de masse de (3). L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \vec{z}$  avec  $g > 0$ .

$$\vec{O}_1 \vec{G} = H \vec{y} + h \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{O}_1 \vec{O}_2 = L \vec{y}$$

Les roues sont supposées sans masse et de rayon  $R$ . Le contact entre une roue et le sol (0) est supposé ponctuel (aux points  $I_1$  et  $I_2$ ), et le coefficient de frottement de Coulomb correspondant est noté  $\mu$ . Le repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est orthonormé direct.

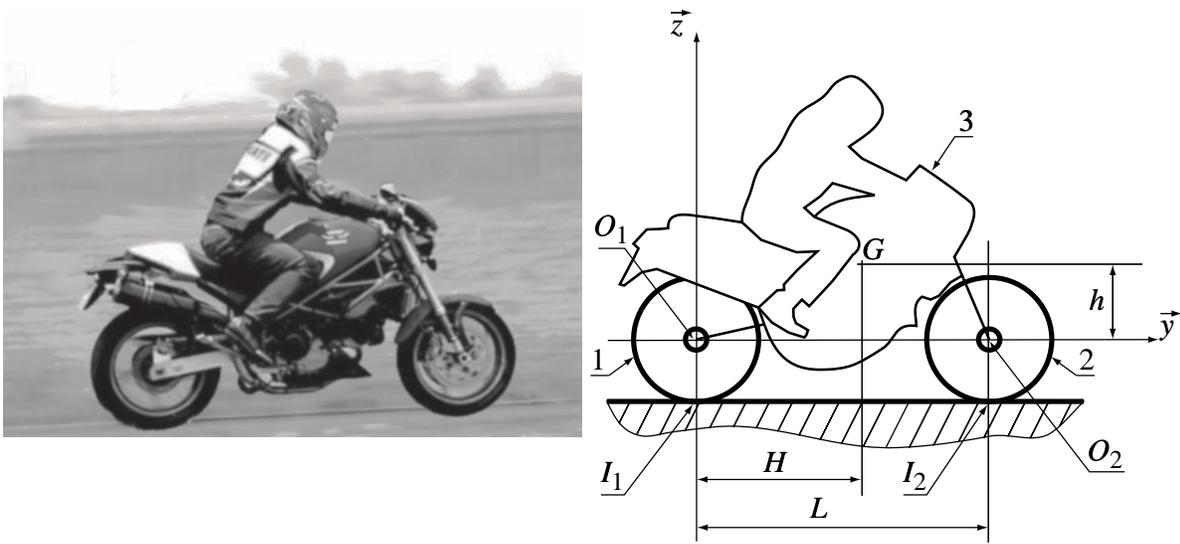


Figure 7

Le système de motorisation est tel qu'une action mécanique est exercée entre la roue arrière (1) et l'ensemble (3). En particulier, la projection sur  $\vec{x}$  du couple en  $O_1$  exercé par (1) sur (3) par l'intermédiaire de ce système est notée  $C$ . Un système de freinage permet quant à lui d'exercer une action mécanique entre (2) et (3), dont la projection sur  $\vec{x}$  du couple en  $O_2$  exercé par (2) sur (3) est notée  $C_f$  (on a donc  $C_f \leq 0$ ).

Dans un premier temps, la moto avance à vitesse constante  $V_0 \vec{y}$ . Les efforts aérodynamiques de l'air sur la moto et le pilote sont supposés être le torseur suivant :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{l} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

Pour vaincre ces efforts, le couple  $C$  est constant. Dans cette question, le pilote ne freine pas, et donc  $C_f = 0$ . On suppose qu'il n'y a pas de glissement entre les roues et le sol.

- (A) L'effort exercé par le sol (0) sur la roue arrière (1) a une composante suivant  $\vec{y}$  de valeur

$$\frac{C}{R}$$

- (B) L'effort exercé par le sol (0) sur la roue arrière (1) a une composante suivant  $\vec{z}$  de valeur

$$\left(1 - \frac{H}{L}\right)mg + \left(1 + \frac{h}{R}\right)\frac{C}{L}$$

- (C) L'effort exercé par le sol (0) sur la roue avant (2) a une composante suivant  $\vec{z}$  de valeur

$$\frac{H}{L}mg - (1 + \frac{h}{R})\frac{C}{L}$$

(D) L'effort exercé par le sol (0) sur la roue avant (2) a une composante suivant  $\vec{y}$  de valeur

$$\frac{C}{R}$$

(E) Les forces aérodynamiques sont

$$F = \frac{C}{L}$$

### Question 9

On reprend la motocyclette étudiée dans la **question 8**. Cette fois-ci, le pilote freine et la vitesse de la moto,  $V$ , décroît à partir de la vitesse  $V_0$  au début du freinage qui correspond à l'instant  $t = 0$ . On suppose maintenant le couple  $C$  nul, et le couple  $C_f$  constant et négatif. On négligera les efforts aérodynamiques :  $F = 0$ . Le coefficient de frottement de Coulomb entre les roues et le sol est noté  $\mu$ .

(A) La vitesse évolue pendant la phase de freinage comme

$$V = V_0 + \frac{C_f}{mR} t$$

(B) L'effort exercé par le sol (0) sur la roue avant (2) a une composante suivant  $\vec{z}$  de valeur

$$(1 + \frac{h}{R})C_f$$

(C) Pour qu'il n'y ait pas de glissement entre la roue avant et le sol, il faut que le couple de freinage soit inférieur en norme à

$$\frac{\mu HR}{L - \mu(h + R)} mg$$

(D) La durée de la phase de freinage (jusqu'à l'arrêt complet de la moto) est de

$$- \frac{m R V_0}{C_f}$$

(E) L'énergie cinétique à dissiper pendant toute la phase de freinage est  $\frac{1}{2} m V_0^2$

### Question 10

On considère le mécanisme plan schématisé sur la **figure 8**. Il est constitué d'un moteur rotatif en A, d'un bâti (0), de trois barres (1), (2) et (3), et de quatre liaisons pivots supposées parfaites.

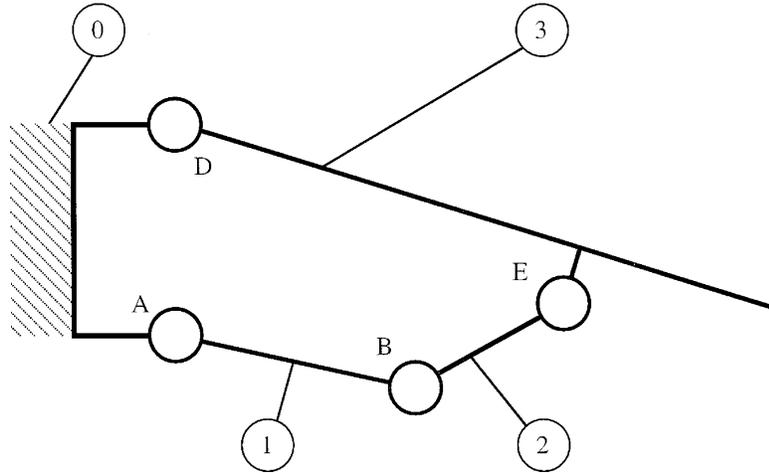


Figure 8

- (A) À l'aide d'une analyse plane d'hyperstatisme, on trouve que le schéma cinématique représenté sur la **figure 8** est isostatique.
- (B) Connaissant le vecteur vitesse du point  $M$  appartenant à (1) par rapport au bâti (0),  $\vec{V}(M, 1/0)$  (voir **figure 9**), alors le vecteur vitesse du point  $C$  appartenant à (3) par rapport au bâti (0),  $\vec{V}(C, 3/0)$ , est bien celui représenté sur la **figure 9**.

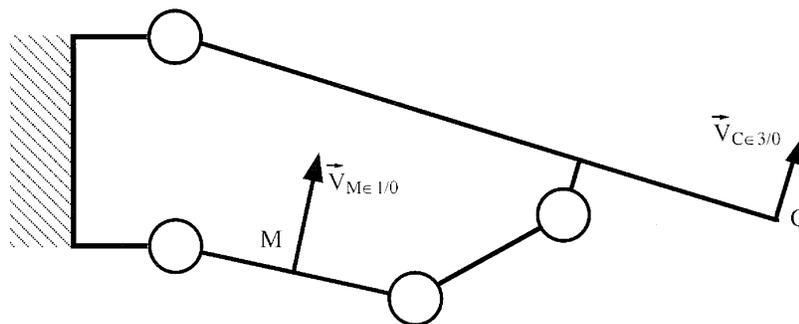


Figure 9

- (C) On a représenté la barre (2) sur la **figure 10**. On donne sur cette figure la représentation graphique des vecteurs vitesses de trois points appartenant à (2). Ces trois vecteurs peuvent bien être des vecteurs vitesses de trois points du solide (2).

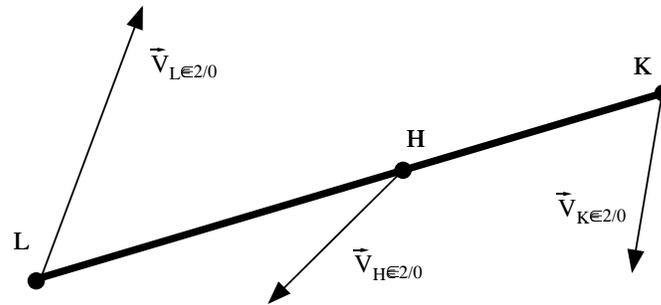


Figure 10

- (D) Le centre instantané de rotation de (2) dans son mouvement par rapport au bâti (0) est le point *B* de la **figure 8**.
- (E) Sachant que, sur la **figure 9**, la vitesse du point *C* appartenant à (3) par rapport à (0) a un module de 0,3 m/s et que la longueur du bras (1) est 50 cm, la fréquence de rotation du moteur a un module compris entre 1 tr/s et 2 tr/s.

### Question 11

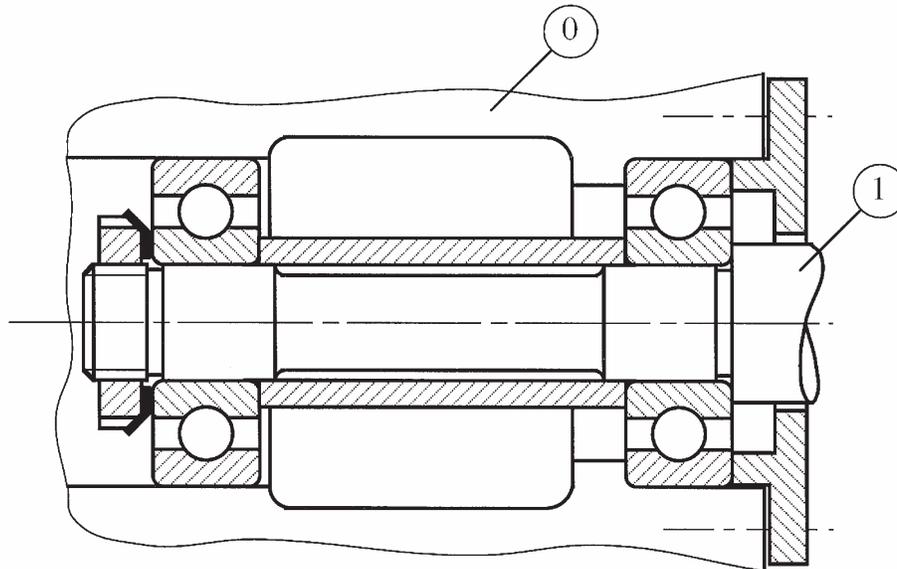


Figure 11

- (A) Sachant que, sur le montage de la **figure 11**, la charge appliquée à l'arbre (1) tourne par rapport au bâti (0), il est nécessaire de monter les bagues extérieures avec un ajustement serré.

- (B) Les bagues fixes par rapport à la direction de la charge ne sont pas obligatoirement arrêtées axialement.
- (C) L'angle de rotulage admissible par un roulement rigide à une rangée de billes a un ordre de grandeur compris entre 2' et 10' (minutes d'angle).
- (D) Un roulement rigide à une rangée de billes peut être préféré aux butées à billes à vitesses élevées.
- (E) L'acier 100C6 (désignation AFNOR, 1 % de carbone, 1,5 % de chrome) est un bon candidat pour réaliser les pièces servant de chemins de roulement.

### Question 12

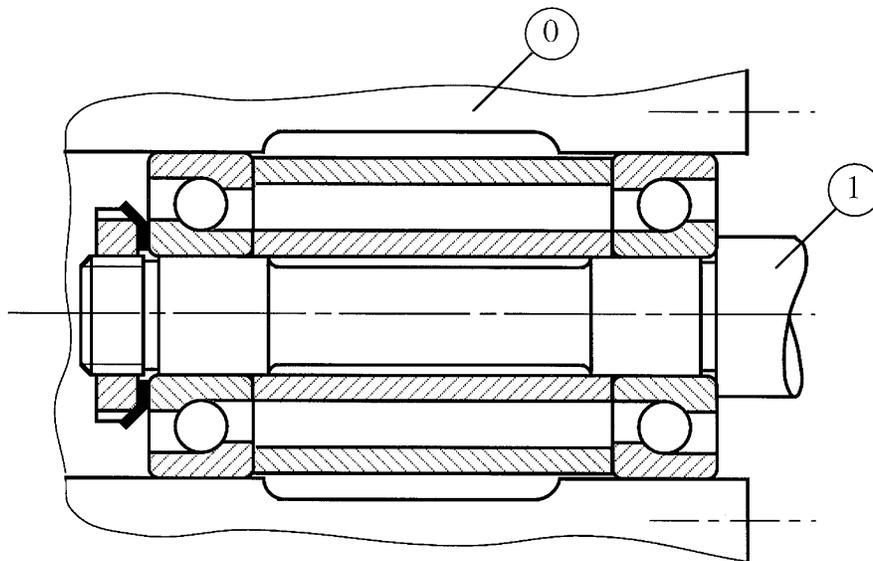


Figure 12

- (A) Le montage de roulements représenté sur la **figure 12** est correct.
- (B) Un roulement à une rangée de billes à contact oblique accepte une charge axiale plus importante qu'un roulement rigide à billes de même dimension.
- (C) Le montage représenté sur la **figure 12** est qualifié de montage en "O".
- (D) L'entretoise intérieure a un rôle de réglage.
- (E) L'angle de rotulage admissible par un roulement à une rangée de billes à contact oblique a un ordre de grandeur compris entre 5° et 8°.