On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ avec a, b et c trois paramètres réels strictement positifs

Question 1

(A) La fonction f n'est pas définie pour x strictement négatif.

(B) Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de e^x est $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

(C) Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de a^x est $a^x = 1 + ax + \dfrac{a^2x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

(D) Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}$ est :

$\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3} = 1 + x\ln(\sqrt[3]{abc}) + \dfrac{x^2\left(\ln^2 a + \ln^2 b + \ln^2 c\right)}{3} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

(E) $\ln(1+x) = x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Question 2

(A) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{\ln\left(a^x + b^x + c^x\right)}{x}}}{3}$

(B) Le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\ln\left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)$ est :

$x\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) + x\varepsilon(x)$avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

(C) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{a + b + c}{3}$

(D) Si $d > 0$, le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\ln\left(\dfrac{a^x + b^x + c^x + d^x}{4}\right)$ est

$x\ln\left(\sqrt[3]{abcd}\right) + x\varepsilon(x)$avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

(E) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x + d^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[4]{abcd}$

Soit l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} F(t)dt$, avec $F(t) = \dfrac{N(t)}{D(t)}$ dans lequel $N(t) = 20\sin(2t)$ et $D(t) = \cos(3t) + 8\cos(2t) + 39\cos(t) + 48$. Pour la calculer, on utilise le changement de variable $x = \cos(t)$. Après avoir effectué ce changement de variable on a $I = \int_0^1 f(x)dx$ dans lequel

$f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ est une fraction rationnelle à déterminer (où on suppose que le coefficient du terme de plus haut degré de $B(x)$ vaut 1) . Pour calculer $f(x)$, il faut exprimer $\cos(2t)$,et $\cos(3t)$ en fonction de $\cos(t)$.

Question 3

(A) On a $\cos(3t) = 3\cos^3(t) - 4\cos(t)$
(B) On a $D(t) = \cos^3 t + 4\cos^2 t + 9\cos t + 10$
(C) Le polynôme $q(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$ se factorise en $q(x) = (ax+b)(x^2+2x+5)$
(D) On a $A(x) = 10x$
(E) Le polynôme $B(x)$ possède une seule racine réelle α qui vaut -4 .

À présent, α étant la seule racine réelle de $B(x)$, on décompose $f(x)$ et on calcule des primitives de chaque terme de cette décomposition

Question 4

(A) Une décomposition de $f(x)$ est $f(x) = \dfrac{-4}{x-\alpha} + \dfrac{4x+10}{x^2+2x+5}$
(B) Une primitive de $\dfrac{1}{x^2+2x+5}$ est $\text{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$
(C) Une primitive de $\dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$ est de la forme $\lambda\ln(x^2+2x+5)$ où λ est un réel.
(D) On a $I = 3\left(\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) + \ln\left(\dfrac{2^{10}}{5^2\times 3^4}\right)$
(E) On a $\tan\left(\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \dfrac{2}{3}$

Soient (H) l'équation différentielle homogène : $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$
(E_1) l'équation différentielle: $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \sin(2t)$,
et (E_2) l'équation différentielle: $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2e^t \sin t$

Question 5

(A) Les solutions de (H) de la forme $y(t) = e^{rt}$ sont obtenues en prenant pour r les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$.
(B) La solution générale de (H) est $y(t) = A(e^t\cos t + e^t\sin t)$ avec A constante réelle.
(C) (H) admet une unique solution telle que $y(0) = 0$
(D) $y(t) = C\cos(2t) + D\sin(2t)$ est solution de (E_1) si et seulement si $\begin{cases} 4C - 2D = 1 \\ C + 2D = 0 \end{cases}$
(E) La solution générale de (E_1) est :

$$y(t) = Ae^t\cos t + Be^t\sin t - \frac{2\cos(2t) + 3\sin(2t)}{13}$$ avec A, B constantes réelles.

Question 6

(A) Une solution particulière de (E_2) est $y(t) = e^t \sin t$

(B) La dérivée seconde de $y(t) = t\, e^t \cos t$ est $y''(t) = 2e^t(\cos t - \sin t - t\sin t)$

(C) Une solution particulière de (E_2) est $y(t) = t\, e^t \cos t$

(D) La solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ est $y(t) = e^t\left(-t\cos t + \sin t\right)$

(E) Il n'existe pas de solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$

On se place dans un plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d' axes (Ox, Oy). On associe à tout point du plan $M(x, y)$ le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe de M. On note O, A les points d'affixes 0 et 1, et B, C les points symétriques par rapport à Ox tels que les triangles (OAB) et (OAC) soient équilatéraux avec $\mathrm{Im}(b) > 0$, b étant l'affixe de B.

Soit Ω le milieu du segment [A,C] , d'affixe ω. φ_1 est l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, φ_2 est l'expression complexe de la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ et $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$.

Pour répondre aux questions suivantes, on sera amené à calculer les affixes ω, b, c de Ω, B, C et à exprimer $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ et $\varphi(z)$ en fonction de z, b, ω .

Question 7

(A) On a $\omega = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{4}$

(B) On a $\varphi_2(z) = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} z$

(C) On a $\varphi(z) = \omega + z$

(D) φ est l'expression complexe de la symétrie par rapport au point Ω

(E) On a $1 - e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$

On veut maintenant caractériser l'ensemble E des points M d'affixe z tels que M, M' d' affixe $z' = \varphi_1(z)$ et M'' d'affixe $z'' = \varphi(z)$ soient alignés.

Question 8

(A) Les points d'affixes z, z', z'' sont alignés si et seulement si
$(z - z')(\bar{z} - \overline{z''}) = (\bar{z} - \overline{z'})(z - z'')$

(B) Les points d'affixes z, z', z'' sont alignés si et seulement si
$e^{-\frac{i\pi}{3}} z(\bar{z} - \overline{\omega}) = e^{\frac{i\pi}{3}} \bar{z}(z - \omega)$

(C) L'ensemble E est caractérisé par $z\,\bar{z} = \mathrm{Im}(e^{\frac{i\pi}{6}}\, \bar{z})$

(D) L'équation cartésienne de E est $x^2 + y^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} y - \dfrac{x}{2}$

(E) L'ensemble E est le cercle Γ de diamètre $[O, C]$

Une usine de composants électroniques fabrique des résistances. En mesurant un grand échantillon de ces composants on constate que la résistance nominale en Ohms de chaque composant tiré au hasard est une variable aléatoire X qui suit la loi normale (ou encore loi de Gauss) d'espérance 1000 Ω et d'écart type 10 Ω. On rappelle que si la variable aléatoire Y suit la loi normale centrée-réduite :

la probabilité que $-1,96<Y<1,96$ est de 95%,
la probabilité que $-1,64<Y<1,64$ est de 90%,
la probabilité que $Y<1$ est de 84%

Les valeurs de ces seuils sont arrondies à 10^{-2} près.

Question 9

(A) La probabilité que la résistance du composant tiré soit entre 980 Ω et 1020 Ω est supérieure à 95%
(B) La probabilité que la résistance du composant tiré soit entre 991 Ω et 1009 Ω est supérieure à 90%
(C) La probabilité que la résistance du composant tiré soit supérieure à 983,6 Ω est supérieure à 97%
(D) La probabilité que la résistance du composant tiré soit entre 990 Ω et 1010 Ω est de 84%
(E) La probabilité que la résistance du composant tiré soit entre 983,6 Ω et 1019,6 Ω est de 92,5%

On fait un tirage indépendant de cent résistances et on calcule la résistance moyenne Z des résistances $X_1,\ldots,X_{100}$ (On a donc $Z=\dfrac{X_1+\ldots+X_{100}}{100}$)

Question 10

(A) La variable aléatoire Z suit la loi de Bernoulli.
(B) La variable aléatoire Z a pour espérance 1000 Ω
(C) La variable aléatoire Z a pour écart-type 0,1 Ω
(D) La variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 1000 Ω et d'écart type 1 Ω
(E) La probabilité que Z soit entre 998 Ω et 1002 Ω supérieure à 95%

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie électrique et génie civil.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie informatique.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Soit la fonction f de période 2, impaire, définie par

$$f(0)=0,\quad f(x)=-1\quad \text{si}\ \ 0<x\le\frac{1}{2}\quad \text{et}\quad f(x)=0\ \text{si}\ \ \frac{1}{2}<x\le 1$$

On demande de calculer son développement en série de Fourier

$$S(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)\right)$$

et d'en étudier quelques propriétés. On pose $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1$.

Question 11

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) On a $\omega = 2\pi$

(B) La suite u_n est de période 4 , et on a $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = -2$, $u_3 = -1$

(C) On a $b_n = \dfrac{2}{n\pi} u_n$

(D) La série $S\left(\frac{1}{2}\right)$ s'écrit $\dfrac{2}{\pi} \sum_0^\infty \left(\dfrac{1}{4p+3} - \dfrac{1}{4p+1} \right)$ et converge vers -1

(E) On a $\dfrac{\pi}{8} = \sum_0^\infty \dfrac{1}{(4p+1)(4p+3)}$

On note ici g la primitive de f telle que $g(-1) = 0$, et on appelle $(\alpha_n)_{0 \le n \le \infty}$ et $(\beta_n)_{1 \le n \le \infty}$ ses coefficients de Fourier, et $T(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(n\omega x) + \beta_n \sin(n\omega x) \right)$ la somme de sa série de Fourier.

Question 12

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) La fonction g est 2-périodique avec $g(x) = \dfrac{1}{2} - |x|$ si $|x| < \dfrac{1}{2}$, $g(x) = 0$ si $|x| \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

(B) Une intégration par parties donne $\alpha_n = \dfrac{b_n}{n\pi}$ pour $n > 0$

(C) On a $\alpha_0 = \dfrac{1}{4}$

(D) La relation de Parseval s'écrit dans ce cas $\dfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} g^2(x)dx = \sum_0^\infty \alpha_n^2$

(E) La relation de Parseval donne $\sum_1^\infty \dfrac{u_n^2}{n^4} = \pi^4 \dfrac{77}{384}$

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \in N}$, $(v_n)_{n \in N}$ et $(w_n)_{n \in N}$ définies par la relation de récurrence

(R) $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 8u_n + 7v_n - 7w_n \end{cases}$ les valeurs de u_0, v_0, w_0 étant précisées par la suite.

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 8 & 7 & -7 \end{pmatrix}$. On pose $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

Question 13

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

(A) La relation de récurrence peut s'exprimer matriciellement par $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n$

(B) La matrice **A** a pour polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$

(C) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la matrice $\mathbf{A}$.

(D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la matrice $\mathbf{A}$.

(E) $\mathbf{A}$ est une matrice diagonalisable.

Question 14

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique.)

(A) Si $u_0 = 2$, $v_0 = 2$, et $w_0 = 5$, $(u_n)_{n \in N}$, $(v_n)_{n \in N}$ et $(w_n)_{n \in N}$ sont des suites constantes.

(B) Si $u_0 = 2$, $v_0 = 2$, et $w_0 = 5$, $(u_{2n})_{n \in N}$, $(v_{2n})_{n \in N}$ et $(w_{2n})_{n \in N}$ [les suites obtenues en ne gardant que les indices pairs] sont des suites constantes.

(C) Si $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, et $w_0 = 3$, la suite $(u_n)_{n \in N}$ est telle que $u_n = (-2)^n$

(D) Si $u_0 = v_0$ alors pour tout *n*, $u_n = v_n$

(E) Si $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, et $w_0 = 3$ alors pour tout *n*, $u_n = v_n = 2^n - (-1)^n$

On se propose de trouver quelques propriétés de la courbe $\mathcal{C}$ dont la représentation paramétrique dans un repère orthonormé du plan est : $\begin{cases} x(t) = \sqrt{1 + 2t\sqrt{1-t^2}} + \sqrt{1 - 2t\sqrt{1-t^2}} \\ y(t) = \sqrt{1 + 2t\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1 - 2t\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$, avec t $\in$ [-1 , +1]

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

(A) En posant $t = \sin\theta$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\begin{cases} x(\sin\theta) = \sqrt{1 + \sin(2\theta)} + \sqrt{1 - \sin(2\theta)} \\ y(\sin\theta) = \sqrt{1 + \sin(2\theta)} - \sqrt{1 - \sin(2\theta)} \end{cases}$

(B) La courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées .

(C) Pour tout t $\in$ [-1 , +1] $x^2(t) + y^2(t) = 4$

(D) La courbe C est un cercle centré à l'origine et de rayon 2

(E) Si on pose $\theta = \frac{\pi}{4} - \varphi$ avec φ $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, on a $\begin{cases} x\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right) = \sqrt{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ y\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right) = \sqrt{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) \end{cases}$

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

(A) $y\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right) = \sqrt{2}\left(|\cos\varphi| - |\sin\varphi|\right)$

(B) La plus grande valeur possible pour y est $\sqrt{2}$

(C) La plus grande valeur possible pour x est $2\sqrt{2}$

(D) La courbe C est un demi-cercle centré à l'origine et de rayon 2, avec $x \geq 0$

(E) La courbe C admet une tangente horizontale au point de coordonnées (0,2).