On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f: x \mapsto x^x$ et les équations différentielles définies sur l'ensemble des x réels positifs:

(H) $\quad y'(x) - \ln(x) y(x) = 0 \qquad\qquad$ (NH) $\quad y'(x) - \ln(x) y(x) = f(x)$

Question 1

(A) f est définie sur $\mathbb{R}$.
(B) f admet en 0 à droite la limite 0.
(C) La fonction f est dérivable pour $x > 0$ et sa dérivée est telle que $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$
(D) La fonction dérivée f' admet en 0 à droite la limite 0.
(E) Le développement limité de f à l'ordre 2 en 1 est $f(1+u) = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$

Question 2

(A) La solution générale de (H) est $y(x) = e^{xr(x)}$ avec $r(x) = \ln x$
(B) La solution générale de (H) est $y(x) = K f(x) e^x$ avec $K \in \mathbb{R}$
(C) Si on recherche une solution particulière de (NH) sous la forme $y(x) = K(x) f(x) e^{-x}$ on a $K'(x) = e^x$
(D) La solution générale de (NH) est $y(x) = C f(x)(1 + e^{-x})$ avec $C \in \mathbb{R}$
(E) L'unique solution de (NH) telle que $y(1) = 1 + \frac{1}{e}$ est $y(x) = f(x)(1 + e^{-x})$

Soit D l'ensemble des nombres complexes z tels que Im(z)>0, c'est à dire que D est le demi-plan supérieur ouvert limité par $(x'x)$, et $\Delta = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}. \big| |x| \geq 1\}$

On définit sur D la fonction $F\colon D \to \Delta$ par $F(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Question 3

Dans cette question, w est un complexe fixé de Δ, on cherche à déterminer z tel que F(z)=w

(A) L'équation $z^2 - 2wz + 1 = 0$ possède 2 racines z_1 et z_2 complexes conjuguées .
(B) Les racines de $z^2 - 2wz + 1 = 0$ sont inverses l'une de l'autre et une seule est dans D
(C) Si $w = e^{i\pi/6}$, alors les complexes δ tels que $\delta^2 = w^2 - 1$ sont $e^{i\pi/6}$ et $-e^{i\pi/6}$
(D) Si $w = e^{i\pi/6}$, l'unique $z \in D$ tel que $w = F(z)$ est $z = (\sqrt{3} - 1)\frac{1+i}{2}$
(E) Si w décrit le segment $\left]-1,1\right[$, z décrit un demi-cercle de rayon 1 .

Ici (Γ) est la courbe image par F de la demi-droite de D définie par $z = re^{i\pi/4}$ avec $0 < r < +\infty$

On pose $F(z) = w = u + vi$, avec u et v réels et on recherche une équation cartésienne de (Γ) . On note $M(r)$ le point de la courbe (Γ) de paramètre r.

Question 4

(A) $u + v = r\sqrt{2}$

(B) L'équation cartésienne de (Γ) est $u^2 - v^2 = \dfrac{1}{2}$

(C) Un vecteur directeur de la tangente à (Γ) en $M(r)$ a pour composantes $\left(r^2 - 1, r + 1\right)$

(D) La tangente à (Γ) en $M(r)$ coupe l'axe des abscisses en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+r^2)}, 0\right)$

(E) Quand r tend vers $+\infty$, la courbe (Γ) est asymptote à la droite d'équation $u = v + 1$

Pour $n \in N$ et $k \in N^*$ on pose $a_n(k) = \dfrac{1}{16^{n+1}(8n+k)}$. Soient la série $S_k = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n(k)$

la fonction $f : y \mapsto \dfrac{y-1}{(y^2-2)(y^2-2y+2)}$ et les intégrales $I = \int_0^1 f(y)\,dy = \int_0^1 \dfrac{y-1}{(y^2-2)(y^2-2y+2)}dy$

et $J = \int_0^1 \dfrac{4-2y^3-y^4-y^5}{16-y^8}dy$ On donne les factorisations: $y^4 + 4 = (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2)$

et $4 - 2y^3 - y^4 - y^5 = -(y-1)(y^2+2)(y^2+2y+2)$

Question 5

(A) Pour $0 < y < 1$ on a le développement en série convergente $\dfrac{y^k}{16-y^8} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^{8n+k}}{2^{8n+4}}$

(B) On a $S_k = \int_0^1 \dfrac{y^k}{16-y^8}dy$

(C) On a $4S_1 - 2S_4 - S_5 - S_6 = 16J$

(D) On a $J = I$

(E) On a la factorisation $16 - y^8 = -(y^2-2)^2(4+y^4)$

Question 6

(A) Une primitive de $\dfrac{2-y}{y^2-2y+2}$ est $-\dfrac{1}{2}\ln|y^2-2y+2|$

(B) f se décompose sous la forme $f(y) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{y+2}{y^2-2y+2} + \dfrac{y}{y^2-2}\right)$

(C) Une primitive de $\dfrac{1}{y^2-2y+2}$ est $2\,\mathrm{Arctan}\left(y - \dfrac{1}{2}\right)$

(D) Une primitive de $f(y)$ est $\dfrac{1}{4}\mathrm{Arctan}\left(y-1\right) + \dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{-y^2+2}{y^2-2y+2}\right)$

(E) On a $I = 2\pi$

Pour z complexe, soit $A(z)=1-\frac{5}{9}z+\frac{2}{3}z^2$, et $B(z)=z^2-\frac{5}{9}z+\frac{2}{3}$ le polynôme réciproque de $A(z)$.
On note $\{a_1,a_2\}$ l'ensemble des deux racines de $B(z)$. Ici z est un nombre complexe.
On s'intéresse aux deux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies, pour a complexe donné , par

$$z \mapsto h_a(z)=\frac{z-a}{-\bar{a}z+1} \text{ avec } |a|\neq 1 \text{ et } z\mapsto F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

Question 7

(A) Les racines de B sont les inverses de celles de A .

(B) Le polynôme $A(z)$ a deux racines complexes conjuguées de module $\frac{2}{3}$

(C) On a $|z-a|^2-|-\bar{a}z+1|^2=\left(|z|^2+1\right)\left(1-|a|^2\right)$

(D) Si $a=a_1$ ou $a=a_2$, l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z|<1\right\}$, est globalement invariant par $h_a(z)$

(E) On a $F(z)=\frac{2}{3}h_{a_1}(z)h_{a_2}(z)$

La production mensuelle d'une mine est toujours comprise entre 0 et 30 (les unités sont des tonnes). Elle suit une variable aléatoire X de densité $f(x)=\alpha\left(-x^2+30x\right)$. pour x entre 0 et 30. Le paramètre α est à déterminer pour que f ait les propriétés d'une densité de probabilité. On note E l'espérance d'une variable aléatoire, et Var sa variance.

Question 8

(A) α vaut $\frac{1}{4500}$

(B) La probabilité que la mine produise une année moins de 10 tonnes est $\frac{1}{3}$

(C) $\mathrm{E}(X)=15$

(D) $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X)^2-\mathrm{E}(X^2)$

(E) $\mathrm{Var}(X)=270$

On considère maintenant que la production de cette mine pendant 12 mois est représentée par 12 variables aléatoires indépendantes X_1 ,...,X_{12} , chacune d'entre elle suivant la loi de densité : $f(x)=\alpha\left(-x^2+30x\right)$. On considère qu'il y a sous-production un mois donné si la production est tombée au dessous de 10 tonnes. En appliquant le théorème de la limite centrée, la production annuelle peut être approchée par la loi de Gauss (dite aussi loi normale) de paramètres m et σ à préciser. On rappelle que si Y suit la loi de Gauss centrée réduite, P ($|Y|$< 1,96) =95%

Question 9

(A) La probabilité qu'il y ait sous-production les trois premiers mois de l'année est $\frac{1}{27}$

(B) La probabilité qu'il n'y ait pas sous-production pendant 12 mois consécutifs est $\left(\frac{20}{27}\right)^{12}$

(C) La production annuelle peut être approchée par la loi de Gauss d'espérance m = 180

(D) La production annuelle peut être approchée par la loi de Gauss d'écart type $\sigma=12\sqrt{45}$

(E) La probabilité que la production annuelle se site entre 180-1,96$\sqrt{540}$ et 180+1,96$\sqrt{540}$ est de l'ordre de 95%

Les questions 10 et 11 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie électrique et génie civil.

Les questions 12 et 13 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie informatique.

Les questions 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Soit un réel a tel que $0 < a < 1$, et $S(\varphi) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a^k e^{ik\varphi}$. On pose $T(\varphi) = S(\varphi) + S(-\varphi) - 1$

On va exprimer $T(\varphi)$ comme série puis comme fraction trigonométrique réelle.

Question 10

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) $S(\varphi) = \dfrac{1}{1 + ae^{i\varphi}}$

(B) La série de Fourier de $T(\varphi)$ est $SFT(\varphi) = 1 + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} a^k \cos(k\varphi)$

(C) Pour tout k entier strictement positif on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(k\varphi)d\varphi}{1 + a^2 - 2a\cos(\varphi)} = \frac{\pi\, a^k}{1 - a^2}$

(D) On a $\displaystyle\int_0^{2\pi} |T(\varphi)|^2 d\varphi = 1 + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} a^{2k}$

(E) On a $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1 + a^2 - 2a\cos(\varphi)\right)^2} = \frac{1 + a^2}{\left(1 - a^2\right)^3}$

On se donne maintenant le polynôme trigonométrique $f(\varphi) = \sum_{k=-N}^{k=N} e^{ik\varphi}$,avec N entier positif. On pose $Q(\varphi) = \sum_{k=-N}^{k=N} a^{|k|} e^{ik\varphi}$

Question 11

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) On a $f(\varphi)e^{iN\varphi} = \dfrac{1 - e^{2iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$

(B) Le développement en série de Fourier de $Q(\varphi)$ est $SFQ(\varphi) = \sum_{k=1}^{k=N} a^k \cos(k\varphi)$

(C) On a $Q(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi - \theta)T(\theta)d\theta$

(D) On a $f(\varphi) = \dfrac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$

(E) On a $Q(\pi) = \dfrac{1 - a + 2a^{N+1}}{1 + a}$

Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ muni du repère orthonormé $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les applications linéaires $f: E \to E$ de matrice $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $g: E \to E$ de matrice $\mathbf{K} = \frac{1}{3}\mathbf{J} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. **I** est la matrice de l'identité de *E*.

Question 12

(Seulement pour les candidats de l'options génie informatique)

(A) On a $f^2 = f \circ f = 3f$
(B) Le polynôme caractéristique de la matrice **J** est $P(x) = -x^3 - 3x^2$
(C) La matrice **J** a une valeur propre double.
(D) La matrice **J** n'est pas diagonalisable car son polynôme caractéristique a une racine double.
(E) *f* admet un sous-espace propre de dimension 1 engendré par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Question 13

(Seulement pour les candidats de l'options génie informatique)

(A) L'application *g* admet pour valeurs propres 0 et 1
(B) $g^2 = g$
(C) $g^4 = g^2$
(D) g^2 est une projection orthogonale sur un plan.
(E) Le noyau de *g* est de dimension 1

Dans un repère orthonormé, on considère la courbe (C_1) d'équation cartésienne $4x^2y^2 = x^2 - y^2$ et la courbe (C_2) d'équation $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$. On appelle *S* l'aire du domaine situé entre la courbe (C_1) et la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

Question 14

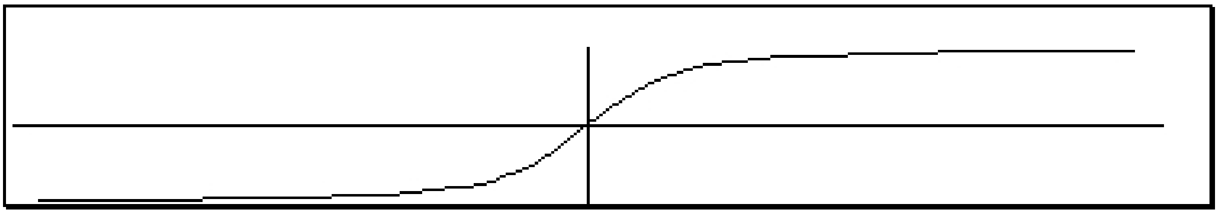
(Seulement pour les candidats de l'options génie mécanique)

(A) La courbe (C_1) admet l'origine comme centre de symétrie.
(B) La courbe (C_1) admet l'axe $(x'x)$ comme axe de symétrie.
(C) La fonction $f: x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$ admet un maximum pour *x*=1.
(D) La courbe (C_2) admet une asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{-1}{2}$
(E) Les courbes (C_1) et (C_2) sont identiques.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l’options génie mécanique)

(A) La courbe (C_1) a l'allure suivante:



(B) À l'origine, la courbe (C_1) admet deux tangentes qui font entre elles un angle de mesure $\frac{\pi}{4}$

(C) En coordonnées polaires (r,θ), la courbe (C_1) a pour équation $r^2 = \frac{\cos(2\theta)}{\sin^2(2\theta)}$

(D) L'aire du domaine situé entre la courbe (C_1) et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est :

$$S = 2\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}\right)dx$$

(E) L'intégrale qui donne S est divergente.