

**BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS**

**- SESSION 2000 -**

**ÉPREUVE  
DE MÉCANIQUE**

*CODE ÉPREUVE : BE-MECA*

**CALCULATRICE INTERDITE**

**DURÉE : 2h30**

### Question 1

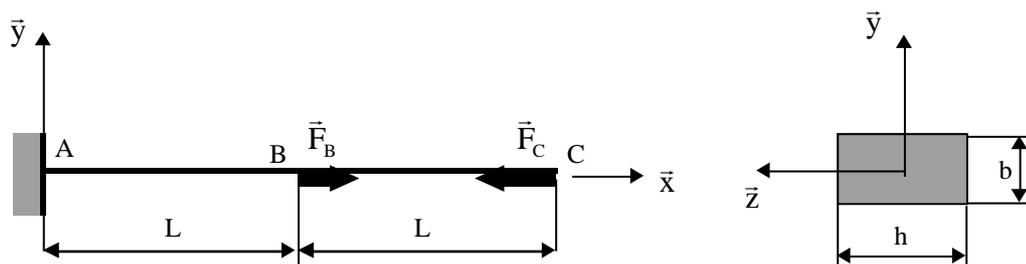
On considère une poutre de Bernoulli, en matériau homogène, isotrope de module d'Young  $E$ . Le poids propre de la poutre est négligeable. Sa section droite est rectangulaire et la longueur de la poutre est  $2L$ .

Elle est encastree en A et soumise à 2 efforts ponctuels en B et C tels que :

$$\vec{F}_B = P_1 \vec{x} \quad (P_1 > 0)$$

$$\vec{F}_C = -P_2 \vec{x} \quad (P_2 > 0)$$

Les positions des différents points ainsi que les dimensions de la section sont données sur le schéma.



(A) La réaction de l'encastrement en A est :

$$\vec{R}_A = (P_1 - P_2) \vec{x}$$

(B) Quelles que soient les valeurs de  $P_1$  et  $P_2$  (toujours positives), le tronçon B - C est toujours soumis à des contraintes de compression.

(C) Si  $P_1 = P_2$ , le tronçon A - B n'est pas contraint.

(D) Si  $P_1 < P_2$ , la contrainte de compression maximum en valeur absolue a lieu dans le tronçon A - B et est égale à :

$$= \frac{P_1 - P_2}{b h}$$

(E) La déformation dans le tronçon B - C est égale à :

$$= -E \frac{P_2}{b h}$$

### Question 2

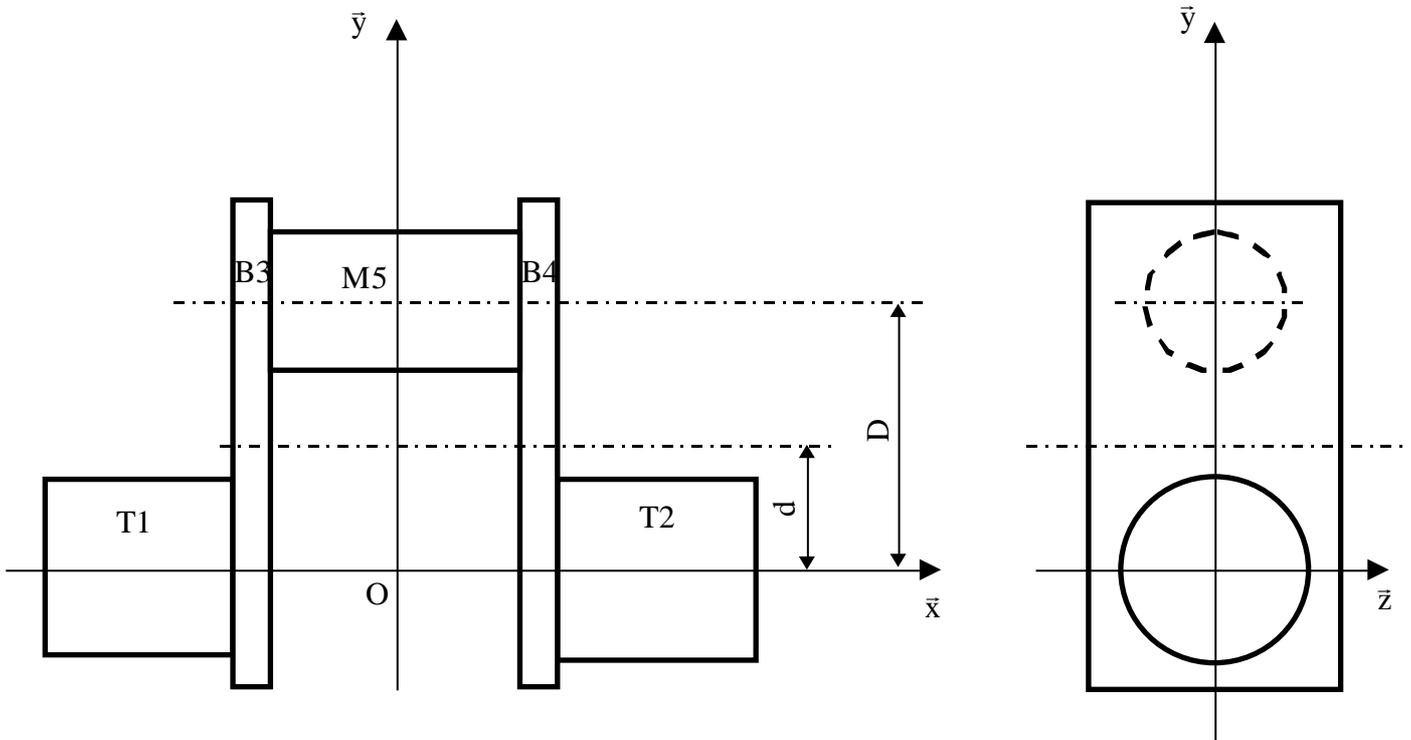
On considère un coude de vilebrequin formé de 2 tourillons T1 et T2, de 2 bras B3 et B4, et d'un maneton M5 (voir schéma ci-dessous).

Les masses respectives de ces éléments sont notées  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$  et  $m_5$ .

Leurs centres d'inertie respectifs sont notés  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $G_4$  et  $G_5$ .

On suppose que les tourillons et le maneton sont des cylindres parfaits de section circulaire.

Les bras sont des parallélépipèdes supposés parfaits.  
 Les dimensions, points et axes sont précisés sur le schéma.  
 On note l'ensemble T1 + T2 + B3 + B4 + M5.



(A) L'équilibrage statique du coude de vilebrequin par rapport à l'axe  $(O, \bar{x})$  (axe de rotation du vilebrequin) est réalisé.

(B) La matrice d'inertie de l'ensemble au point O dans la base  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est de la forme :

$$\bar{I} (O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

(C) Le maneton M5 étant un cylindre de rayon  $R_5$ , de hauteur  $h_5$ , de masse  $m_5$ , de centre d'inertie noté  $G_5$ , son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(G_5, \bar{x})$  est :

$$I_{M5}(G_5, \bar{x}) = \frac{m_5}{12} (3R_5^2 + h_5^2)$$

(D) L'axe  $(O, \bar{x})$  est axe principal d'inertie pour l'ensemble .

(E) Le moment d'inertie du maneton M5 par rapport à l'axe  $(O, \bar{x})$  est :

$$I_{M5}(\text{O}, \bar{x}) = \frac{m_5 R_5^2}{2} + m_5 D^2$$

### Question 3

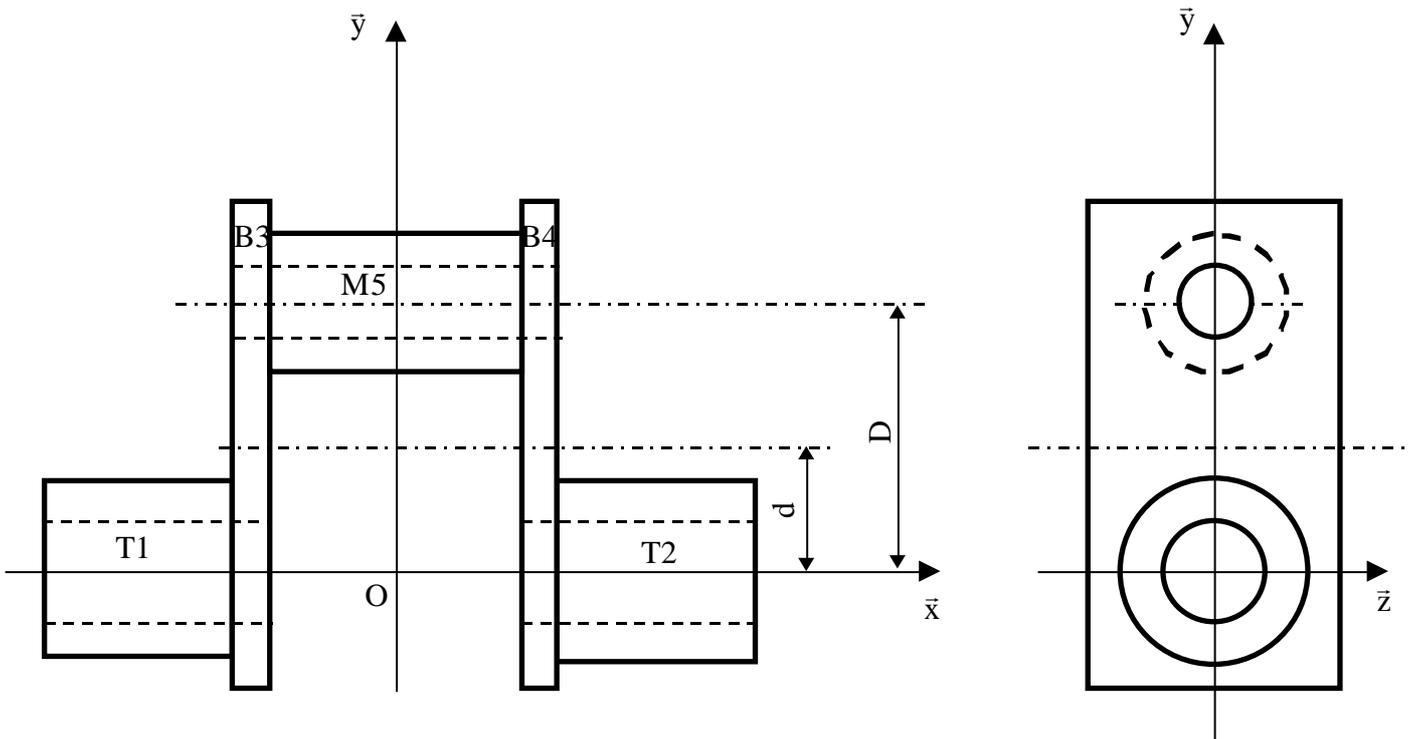
On considère toujours le coude de vilebrequin de la question précédente.

(A) Le centre d'inertie de l'ensemble est le point G tel que :

$$\text{O}\vec{G} = \frac{m_3 d + m_4 d + m_5 D}{m_3 + m_4 + m_5} \bar{y}$$

(B) L'équilibrage dynamique du coude de vilebrequin par rapport à l'axe  $(\text{O}, \bar{x})$  est réalisé.

On considère maintenant un coude « allégé », où les tourillons, les bras et le maneton ont été alésés (voir schéma ci-dessous). On suppose les alésages parfaits, de rayons  $r_1$  et  $r_2$  pour les bras, et de rayon  $r_5$  pour le maneton.



(C) Le centre d'inertie reste inchangé pour chacun des solides.

(D) La forme de la matrice d'inertie du coude allégé au point O dans la base  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est modifiée par rapport à celle du coude « plein ».

(E) Le moment d'inertie du tourillon T1 par rapport à l'axe  $(G_1, \bar{x})$  est maintenant :

$$I_{T1}(G_1, \bar{x}) = \frac{m_1}{2} (R_1^2 - r_1^2)$$

#### Question 4

On considère le mécanisme dont le schéma cinématique est donné ci-dessous. Ce mécanisme est constitué :

- d'un bâti  $S_0$
- d'un bras coudé  $S_1$  en liaison glissière avec le bâti  $S_0$ .
- d'une roue munie d'un bras  $S_2$  en liaison pivot avec le bras coudé  $S_1$  et en contact ponctuel en I avec le bâti  $S_0$
- d'un galet  $S_3$  en liaison pivot glissant avec le bras lié à  $S_2$ .

A chaque solide  $S_i$  (pour  $i = 0, 1, 2$ ), on lie un repère noté  $R_i(O, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  tels que (voir schéma) :

- $\bar{y}_0$  soit vertical ascendant.
- $(O_0, \bar{y}_0)$  : axe de la liaison glissière 0 – 1.
- $(O_2, \bar{z}_2) = (O_1, \bar{z}_1)$  : axe de la liaison pivot 1 – 2.
- $(O_2, \bar{x}_2)$  : axe de la liaison pivot glissant 2 – 3.

Le galet  $S_3$  est considéré comme une masse ponctuelle au point  $O_3$ . On ne lui attache donc aucun repère.

Les dimensions, points et axes sont précisés sur le schéma cinématique.

#### Éléments de géométrie des masses :

- $S_1$  a pour masse  $m_1$ , pour centre d'inertie  $G_1$  tel que :  $O_1\vec{G}_1 = -a\bar{x}_1 + b\bar{y}_1$  ( $a, b > 0$ )
- $S_2$  a pour masse  $m_2$ , pour centre d'inertie  $G_2$  tel que  $O_2\vec{G}_2 = c\bar{x}_2$  ( $c > 0$ ) et pour matrice d'inertie en  $G_2$  dans la base 2 :

$$\bar{I}_{S_2}(G_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

- $S_3$  est une masse ponctuelle  $m_3$  en  $O_3$ .

Hypothèses : - Le repère lié au bâti est supposé galiléen.

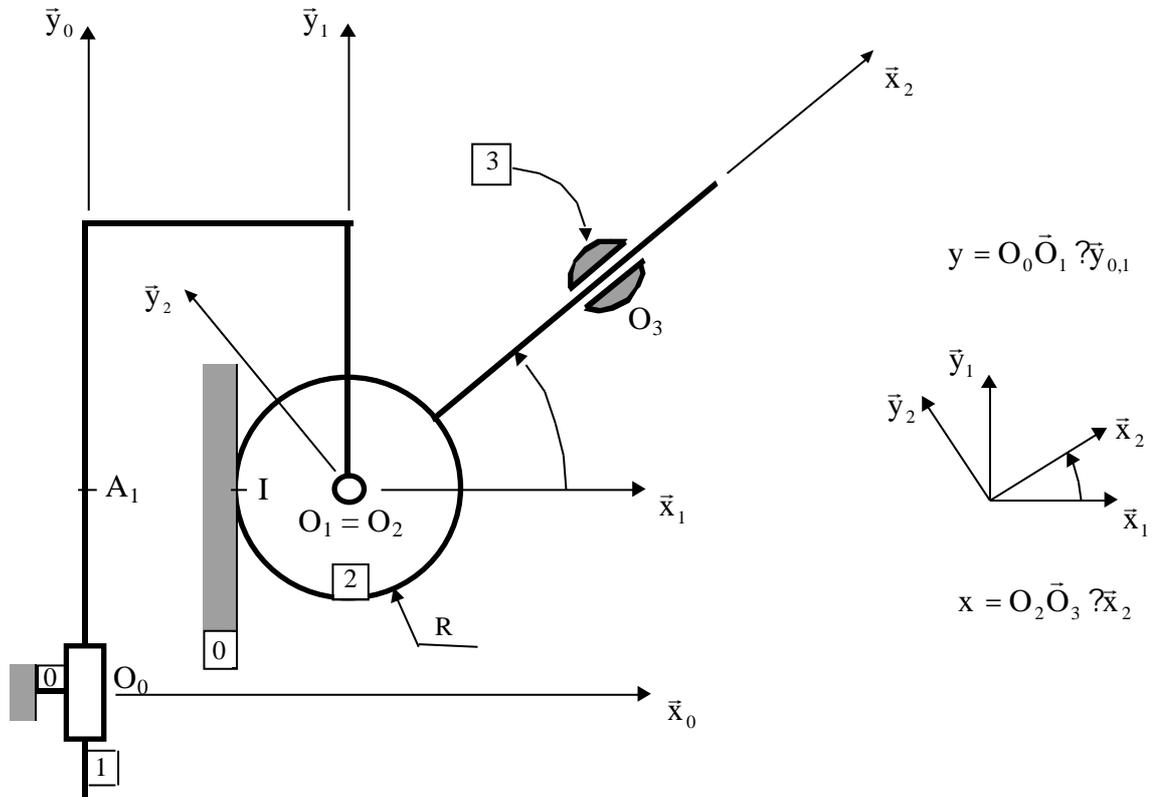
- Les liaisons 0 - 1, 1 - 2 et 2 - 3 du mécanisme sont supposées parfaites.

Notation : dans tout le problème, le torseur des Actions Mécaniques Transmissibles par un solide  $S_i$  sur un solide  $S_j$  en un point quelconque P sera noté :

$$\vec{F}_{i/j} = \begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \\ L_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ij} \end{pmatrix}_b \quad \text{le numéro de la base étant précisé en indice.}$$

On paramètre le système de la façon suivante (voir schéma ci-dessous) :

- mouvement de  $S_1 / S_0$  :  $y = O_0 \vec{O}_1 \vec{y}_{0,1}$
- mouvement de  $S_2 / S_1$  :  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
- mouvement de  $S_3 / S_2$  :  $x = O_2 \vec{O}_3 \vec{x}_2$



(A) La vitesse de glissement au point I de 2 par rapport à 0 est :

$$\vec{V}_2^0(I) = (\dot{y} - R \dot{\theta}) \vec{y}_0$$

On détermine la vitesse du point  $O_3$  par rapport à 0 par la méthode de composition des mouvements en considérant le mouvement de  $S_3$  par rapport à  $S_2$ .

(B) La vitesse relative est alors :

$$\vec{V}^2(O_3) = \dot{x} \vec{x}_2$$

(C) La vitesse d'entraînement est :

$$\vec{V}_2^0(O_3) = x \cdot \vec{y}_2$$

Pour calculer l'accélération du point  $O_3$  par rapport au bâti 0, on utilise à nouveau la méthode de composition des mouvements en considérant le mouvement de  $S_3$  par rapport à  $S_2$ .

(D) L'accélération d'entraînement exprimée dans la base 2 est alors :

$$\vec{a}_2^0(O_3) = \dot{x} \cdot \vec{y}_2 + x \cdot \ddot{y}_2$$

(E) L'accélération de Coriolis exprimée dans la base 2 est égale à :

$$\vec{a}_{\text{Cor}}^2(O_3) = 2 \dot{x} \cdot \vec{y}_2$$

### Question 5

On considère toujours le mécanisme de la question précédente.

(A) Le torseur des actions mécaniques exercées par le solide  $S_2$  sur le solide  $S_3$  au point  $O_2$  dans la base 2 est de la forme :

$$\vec{F}_{2/3} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{23} \\ Z_{23} \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

$$\vec{M}_{2/3}(O_2) = \begin{pmatrix} M_{23} \\ N_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

(B) Le théorème de la Résultante Dynamique appliqué à l'ensemble  $(S_2 + S_3)$  s'écrit :

$$m_2 \vec{a}_2^0(G_2) + m_3 \vec{a}_3^0(O_3) = -(m_1 + m_2)g \vec{y}_0 + \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/3} + \vec{F}_{0/2}$$

(g : accélération de la pesanteur).

On suppose qu'un actionneur monté entre  $S_0$  et  $S_1$  exerce sur  $S_1$  le torseur d'actions mécaniques suivant :

$$F_{A/1} \quad \begin{array}{l} \vec{F}_{A/1} = F \vec{y}_0 \\ \vec{M}_{A/1}(A_1) = \vec{0} \end{array}$$

(C) La résultante de tous les efforts extérieurs s'exerçant sur  $S_1$  est :

$$\vec{F}_{\text{ext}/1} = \begin{array}{l} X_{01} \\ F - m_1 g \\ Z_{01} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ 0 \end{array}$$

$X_{01}$  et  $Z_{01}$  : composantes de la résultante des actions mécaniques de 0 sur 1 exprimée dans la base 0 .

(D) Le moment dynamique du solide  $S_1$  dans son mouvement par rapport à 0 est nul.

(E) Le moment dynamique du solide  $S_2$  en  $O_2$  dans son mouvement par rapport à 0 est :

$${}^{-0}_2(\mathbf{O}_2) = C_2 \cdot \vec{z}_2$$

### Question 6

On considère toujours le mécanisme des questions précédentes.

(A) Le moment dynamique de  $S_3$  au point  $O_2$  dans son mouvement par rapport à 0 se calcule par :

$${}^{-0}_3(\mathbf{O}_2) = O_2 \bar{O}_3 \quad m_3 \quad {}^{-0}(\mathbf{O}_3)$$

On suppose qu'il y a glissement au contact ponctuel en I entre 0 et 2 et que le frottement sec n'est pas négligeable (coefficient de frottement  $f$ ). Le torseur des actions mécaniques de 0 sur 2 est alors de la forme :

$$F_{0/2} \quad \begin{array}{l} X_{02} \\ \vec{F}_{0/2} = Y_{02} \\ Z_{02} \\ \vec{M}_{0/2}(I) = \vec{0} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ 0 \\ \end{array}$$

(B) La Loi de Coulomb appliquée aux efforts au contact en I implique d'une part :

$$Z_{02} = 0$$

(C) et d'autre part :

$$|X_{02}| = f |Y_{02}|$$

Si on suppose qu'il n'y a pas glissement au contact en I :

(D) Les paramètres de mouvement  $x$ , et  $y$  ne sont plus indépendants.

(E) La condition pour que l'hypothèse de non-glissement soit vérifiée est :

$$|X_{02}| > f |Y_{02}|$$

### Question 7

On considère un système vis-écrou, comme transformateur de mouvement. Le mouvement d'entrée est la rotation, sa fréquence est de  $n$  tours/ min et le mouvement de sortie est la translation, de  $x$  mm :

- (A) La loi entrée-sortie est de la forme  $x = (p.n)/z$ , où  $z$  est le nombre de filet de la vis et  $p$  le pas en mm/tour.
- (B) La loi entrée-sortie peut aussi s'exprimer par  $x = z.(p/2)$  , où  $p$  est le pas en mm.
- (C) Un système vis-écrou ne peut fonctionner comme transformateur de mouvement que si les mouvements sont conjugués.
- (D) Pour assurer la transformation de mouvement, si la vis possède le mouvement de translation, alors l'écrou doit être immobilisé en translation.
- (E) Pour assurer la transformation de mouvement, si l'écrou possède le mouvement de rotation et le mouvement de translation, alors la vis doit être immobile.

### Question 8

On considère un système bielle-manivelle, qui transforme un mouvement de translation en rotation, comme dans le cas d'un moteur thermique. On appelle  $OA = R$  = excentration sur le vilebrequin. On appelle  $AB = L$  = la longueur de la bielle. On note  $\dot{\theta}$  la vitesse angulaire du vilebrequin, dérivée de l'angle  $\theta$  par rapport au temps, et  $x_B$  la position, par rapport à un repère considéré comme fixe, du point B point commun à la bielle et au coulisseau. L'origine pour mesurer  $x_B$  est le centre de rotation du vilebrequin.

- (A) La position du point B est donnée par la relation  $x_B^2 - 2.R.x_B.\cos(\theta) = L^2 - R^2$ .
- (B) La position du point B est donnée par la relation  $x_B^2 = L^2 - R^2$ .
- (C) On choisit de construire un rapport  $L/R = 3$  pour éviter deux extremums d'accélération.
- (D) On choisit de construire un rapport  $L/R = \_$  pour éviter les chocs dans les liaisons.
- (E) On obtient une loi de sortie,  $x_B = f(\theta)$ , parfaitement sinusoïdale si la bielle a une longueur telle que  $L/R = 5$ .

### Question 9

On considère un arbre cylindrique dans un moyeu. On appelle  $l$  la longueur commune et  $d$  le diamètre commun, en contact entre l'arbre et l'alésage du moyeu.

- (A) Si l'arbre est serré dans le moyeu, comme dans une broche de tour et que  $l/d > 0,6$ , alors on considère la liaison entre l'arbre et l'alésage comme cinématiquement équivalente à une liaison complète.

- (B) Si l'arbre est serré dans le moyeu, comme dans une broche de tour et que  $l/d < 0,2$ , alors on considère la liaison entre l'arbre et l'alésage comme cinématiquement équivalente à une liaison rotule.
- (C) Si l'arbre est guidé en rotation dans l'alésage, comme dans un palier lisse, alors la loi d'évolution de la tangente de l'angle de rotulage entre l'arbre et l'alésage, angle entre l'axe de l'arbre et l'axe de l'alésage, en fonction du rapport  $l/d$  a une allure hyperbolique.
- (D) Si l'arbre est guidé en rotation dans l'alésage, comme dans un palier lisse, et que  $l/d < 0,5$ , alors on considère la liaison entre l'arbre et l'alésage comme cinématiquement équivalente à une liaison rotule.
- (E) La différence d'appréciation, les valeurs limites pour  $l/d$  sont différentes entre les items (B) et (D), entre le cas serré et le cas guidé, ci dessus, est due à la prise en compte du jeu.

### **Question 10**

Si on considère un système vis-écrou comme système de transformation de mouvement,

- (A) Si la vis est à filet trapézoïdal, alors l'écart de pas pour une longueur de 300 mm de vis est d'un ordre de grandeur compris entre 50 et 300  $\mu\text{m}$ .
- (B) Si la vis est à filet trapézoïdal, alors l'écart de pas pour une longueur de 300 mm de vis est d'un ordre de grandeur compris entre 2 mm et 5 mm.
- (C) Si la vis est une vis à billes, alors l'écart de pas pour une longueur de 300 mm de vis est d'un ordre de grandeur de 2 mm.
- (D) Si la vis est une vis à billes, alors l'écart de pas pour une longueur de 300 mm de vis est d'un ordre de grandeur compris entre 5 et 200  $\mu\text{m}$ .
- (E) L'ordre de grandeur du jeu axial est divisé par dix pour une vis à bille par rapport à une vis à filet trapézoïdal.

### **Question 11**

Considérons le système à came de la distribution d'un moteur thermique automobile à essence. Ce système transforme la rotation de l'arbre à came en translation des soupapes, afin d'assurer, d'une part, l'admission du mélange air-essence et d'autre part l'échappement des gaz brûlés.

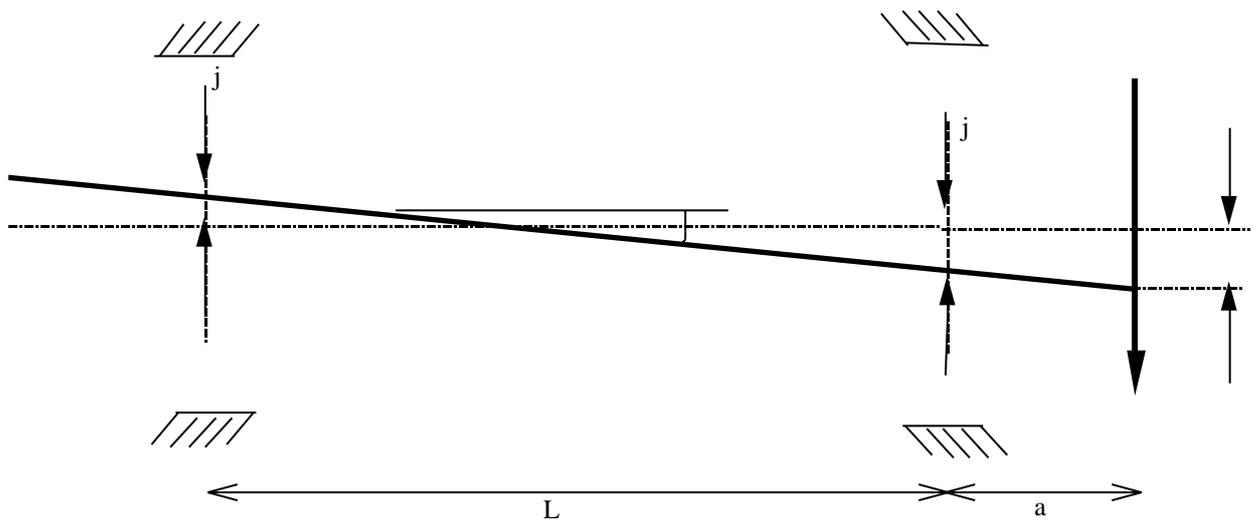
- (A) Dans le cas d'un arbre à came en tête, la vitesse de rotation de l'arbre à came, par rapport au bâti considéré comme fixe, est le double de celle du vilebrequin.
- (B) Dans le cas d'un arbre à came en tête, la vitesse de rotation de l'arbre à came, par rapport au bâti considéré comme fixe, est la moitié de celle du vilebrequin.
- (C) Pour une même loi de levée, le profil de la came n'aura pas la même forme selon que le suiveur, c'est-à-dire la pièce en contact avec la came, est un plateau ou un galet.

- (D) Dans le cas d'une came dont le suiveur est un plateau, le profil de came est différent de la loi de levée.
- (E) Les cames d'un arbre à came sont cémentées puis nitrurées, avant d'être trempées.

### Question 12

On considère l'arbre d'un réducteur de vitesse à engrenage, guidé en rotation sur deux roulements. Un pignon est centré entre les roulements et un autre en porte-à-faux à droite du montage, selon la figure ci-dessous.

On modélise de la façon suivante, en considérant tous les éléments indéformables et un jeu radial dans les roulements notés  $j$  et  $j'$ .



- (A) Dans la configuration du schéma ci-dessus, on obtient la déflexion en bout d'arbre, qui vaut  $\delta = j \cdot (1 + 2a/L)$ , en considérant que  $j = j'$ .
- (B) Dans la configuration du schéma ci-dessus, on obtient la déflexion en bout d'arbre, qui vaut  $\delta = j \cdot (1 + a/L)$ , en considérant que  $j = j'$ .
- (C) Les jeux radiaux seront plus importants si les roulements sont à billes à contact radial que si les roulements sont à rouleaux coniques.
- (D) Un roulement à rouleaux coniques peut admettre un rotulage maximum de  $1^\circ$ .
- (E) L'angle de rotulage  $\alpha$ , qui va être imposé aux roulements dans la configuration de la figure, est calculable par la relation  $\tan \alpha = j/2L$ .