Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ Pour $x_0 > 0$ on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$. On pose $\delta_n = x_n - 1$

Soit *a>1*. On considère la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$. Pour $t_0 > 0$ on définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $t_{n+1} = g(t_n)$. On étudie la convergence de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si n tend vers $+\infty$. Une valeur approchée de $\sqrt{2}$ est 1,414.

Question 1

(A) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, le minimum de *f* vaut $\frac{1}{2}$
(B) Pour $0 < x_0 < 1$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
(C) Si $1 < x_0$, on a $1 < x_{n+1} < x_n$
(D) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas si $0 < x_0 < 1$
(E) Pour *0<u<1*, on a $|f(1+u) - 1| < u^2$

Question 2

(A) Si $0 < \delta_0 < 1$ on a $0 < \delta_{n+1} < \delta_n^2$
(B) Si $\delta_n = 10^{-4}$ alors $0 < \delta_{n+1} < 10^{-16}$
(C) On a $g(a\,x) = a\,f(x)$
(D) Pour n'importe quel $t_0 > 0$, la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a^2
(E) Pour faire un calcul approché de $\sqrt{2}$ en prenant $a^2 = 2$ et $t_0 = 1{,}5$, alors t_4 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{2}$ à moins de 10^{-16} près.

Soit la fonction polynôme de la variable complexe *z* définie par :
$p(z) = z^3 - (5 + 3i)z^2 + (6 + 10i)z - 8i$
On associe à tout complexe $z = x + y\,i$ le point $M(x, y)$ dans un repère orthonormé.
On note *R,S,T,* les points dont les affixes sont les racines du polynôme *p(z)*, *R* étant le point d'abscisse minimale et *S* le point d'affixe réel.

Question 3

(A) Si *z* est une racine réelle de *p(z)*, on a $z^3 = 5z^2 - 6z$
(B) Si *z* est une racine réelle de *p(z)*, on a $3z^2 - 10z + 8 = 0$
(C) Il existe une racine réelle *a* de *p(z)*, et $p(z) = (z - a)(z^2 + (3 - 3i)z + 4i)$
(D) Les racines complexes de *p(z)* sont conjuguées entre elles.
(E) Une racine carrée du complexe $2i$ est $1 + i$

Question 4

(A) Le triangle *(RST)* est équilatéral.
(B) Le triangle *(RST)* est rectangle en *R*.
(C) Le cercle circonscrit au triangle *(RST)* a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 3x - y + 2 = 0$
(D) Le centre du cercle circonscrit au triangle *(RST)* est sur la droite *(ST)*.
(E) Le centre du cercle inscrit dans le triangle *(RST)* a pour coordonnées $\left(3 - \sqrt{2}, 1\right)$

Soit la fonction $f : u \mapsto \dfrac{1}{1+u^3}$ et l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$ On appelle F(u) une primitive de *f(u)*

Question 5

(A) On a $1+u^3 = (1+u)(1-u+u^2)$

(B) Pour tout réel u, $f(u) = \dfrac{a}{1+u} + \dfrac{bu+c}{1-u+u^2}$ avec $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = c = \dfrac{2}{3}$

(C) Une primitive de $\dfrac{2u-1}{1-u+u^2}$ est $\ln\left|1-u+u^2\right|$

(D) Une primitive de $\dfrac{1}{1-u+u^2}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2u-1}{\sqrt{3}}$

(E) Une primitive F de f est définie par $F(u) = \dfrac{1}{3}\ln\left|1+u\right| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2u-1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{6}\ln\left|1-u+u^2\right|$

Question 6

(A) L'intégrale J est convergente et vaut $\left(\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) - \lim\limits_{a\to 0^+} F(a)\right)$

(B) Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{x}+x^2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{x^2}$

(C) $\lim\limits_{u\to+\infty} \ln\dfrac{(1+u)^2}{1-u+u^2} = 0$

(D) $\lim\limits_{u\to 0} \arctan\dfrac{2u-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{-\pi}{3}$

(E) On a $J = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

Pour $0 \le k \le n$ on note $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ les coefficients du binôme de Newton. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = C_{2n}^n$ et la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_{2n}^n x^n$

Soient les équations différentielles : (H) $(1-4x)y'(x) - 2y(x) = 0$

et pour n entier naturel (E_n) $(1-4x)y'(x) - 2y(x) = x^n$

On va rechercher les solutions de ces équations sur l'intervalle $\left]\dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$

Question 7

(A) On a pour tout entier naturel n, $(n+1)u_{n+1} = (4n+2)u_n$

(B) On a $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{4}$

(C) La série entière qui définit f a pour rayon de convergence $\dfrac{1}{4}$

(D) Sur son intervalle de convergence, f est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} (n+1)u_{n+1}x^n$

(E) Sur son intervalle de convergence, f est solution de l'équation différentielle (H).

Question 8

(A) Sur son intervalle de convergence, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(B) Une solution particulière de (E_1) $\quad (1-4x)y'(x) - 2y(x) = x$ est $p(x) = \dfrac{-x}{6} - \dfrac{1}{12}$

(C) Les solutions de (E_1) sont de la forme $\quad g(x) = \dfrac{-x}{6} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}} + cst$

(D) Pour tout entier naturel *n*, (E_n) admet comme solution particulière un polynôme de degré *n*.

(E) L'équation différentielle (H) n'admet pas de solutions sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$

Une société de fabrication d'ampoules électriques observe que la durée de vie (en jours) de ses ampoules suit une loi Normale de paramètres m et σ . Une étude sur un grand échantillon montre que 10% des ampoules ont une durée de vie inférieure à 100 jours, et 5% des ampoules ont une durée de vie supérieure à 300 jours. On appelle T la variable aléatoire qui à chaque ampoule associe sa durée de vie.
On donne les valeurs suivantes pour une variable aléatoire U qui suit une loi normale centrée réduite.

x	0,52	0,60	0,67	0,76	0,84	0,93	1,04	1,15	1,28	1,44	1,64	1,96
P({U≤x})	70 %	72,5 %	75 %	77,5 %	80 %	82,5 %	85 %	87,5 %	90 %	92,5 %	95 %	97,5 %

En laboratoire, on effectue des tests de durée de fonctionnement sur des lots de 100 ampoules. On appelle "défectueuses" les ampoules qui ont une durée de vie de moins de 100 jours. On note N la variable aléatoire qui donne le nombre d'ampoules "défectueuses" dans un lot de 100 ampoules.

Question 9

(A) P({T≤100}) = 10%
(B) P({T≤300}) = 5%
(C) Pour une variable aléatoire U suivant la loi normale centrée réduite, P({U≤ -1,28})= 10%
(D) m et σ sont solutions du système $\begin{cases} m + 1{,}28\,\sigma = 100 \\ m + 1{,}64\,\sigma = 300 \end{cases}$
(E) On a $m = \dfrac{128+492}{1{,}28+1{,}64}$

Question 10

(A) Dans un lot de 100 ampoules il y a toujours exactement 10 ampoules défectueuses.
(B) La variable aléatoire N suit la loi binomiale d'espérance 0,1.
(C) La variance de N est 9.
(D) La probabilité $P(\{N=2\})$ d'avoir exactement 2 ampoules défectueuses dans un lot de 100 est donnée par $P(\{N=2\}) = C_{100}^{2}\,(0{,}1)^2$
(E) La probabilité que toutes les ampoules soient défectueuses dans un lot de 100 est $P(\{N=100\}) = (0{,}1)^{100}$

Soit une fonction h définie et deux fois dérivable sur È et la fonction $f : È^2 \to È$ définie par : $f(x,y) = x\,y\,h(x\,y)$. On se propose de déterminer h pour que $\Delta f = 0$.

[$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est le laplacien de f]

Question 11

(A) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\,h(x\,y) + x\,y\,h'(x\,y)$

(B) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\,h'(x\,y) + x\,y^3 h''(x\,y)$

(C) Si $\Delta f = 0$, alors h vérifie l'équation différentielle $t\;y''(t) + 2\,y'(t) = 0$

(D) Si $\Delta f = 0$, alors $h'(t) = \dfrac{K}{t^2}$

(E) Les seules fonctions f définies sur $È^2$ et vérifiant $\Delta f = 0$ sont les fonctions constantes.

Les questions 12 et 13 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie électrique et génie civil.

Les questions 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie informatique.

Les questions 16 et 17 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]0,2\pi[$ par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ et $f(0) = 0$.

On note $S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ la série de Fourier de f, et

$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ la somme partielle de Fourier d'ordre n.

On s'intéresse ensuite à la résolution sur [0,2] de l'équation différentielle :

$(Eq) \quad y'(x) + y(x) = f(x)$ avec $y(0) = y(2)$

On notera A_k et B_k les coefficients de Fourier de la solution $y(x)$.

Question 12

(Seulement pour les candidats des options génie électrique. et génie civil)

(A) On a pour tout $k \geq 0$, $a_k = 0$

(B) On a pour tout $k \geq 1$, $b_k = \dfrac{1}{2\,k + 1}$

(C) On a $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\,k + 1}$

(D) On a pour tout $n \geq 1$ et tout x tel que $0 < x < 2\pi$, $\sum_{k=1}^{k=n} \cos(kx) = \dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left[\frac{x}{2}\right]}{2\sin\left[\frac{x}{2}\right]}$

(E) Les maxima de $S_n(x)$ sont tels que $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] = \sin\left[\frac{x}{2}\right]$

Question 13

(Seulement pour les candidats des options génie électrique. et génie civil)

(A) On a obligatoirement $A_0 = 0$

(B) Pour $k > 0$, l'intégration par parties donne $A_k + k\, B_k = 0$ et $k\, A_k + B_k = \dfrac{1}{k}$

(C) La solution de *(Eq)* s'écrit $y = A\, e^{-x} + \dfrac{\pi - x}{2}$

(D) On a $B_k = \dfrac{1}{k(k^2+1)}$

(E) On a $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+1} = \dfrac{1-\pi}{2} + \dfrac{\pi}{1-e^{-2\pi}}$

Soit un espace vectoriel E muni du repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application linéaire $f : E \to E$ qui a pour matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et l'application linéaire $g : E \to E$ qui a pour matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la même base.

Question 14

(Seulement pour les candidats de l'options génie informatique)

(A) L'application linéaire $f^2 = f \circ f$ est une homothétie.

(B) Le polynôme caractéristique de la matrice **A** est $P(x) = -x^3 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}$

(C) Le polynôme caractéristique de **A** et sa dérivée ont une racine en commun.

(D) La matrice **A** n'est pas diagonalisable car son polynôme caractéristique a une racine double.

(E) f admet un sous-espace propre de dimension 1 engendré par $\vec{j}$

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'options génie informatique)

(A) Les applications *f* et g sont inverses l'une de l'autre.

(B) Les applications f^2 et g^2 sont inverses l'une de l'autre

(C) Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont inverses l'une de l'autre

(D) La matrice B est diagonalisable et admet comme matrice diagonale $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(E) La matrice de g^5 dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est $B^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 64 \\ 0 & 32 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On se propose d'étudier la courbe (G) donnée en représentation paramétrique dans un repère orthonormé par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t^3-t}{t^2+1} \end{cases}$

On donne les valeurs approchées suivantes : $\sqrt{5} \approx 2,23$ $\quad \sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 0,49$

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'options génie mécanique)

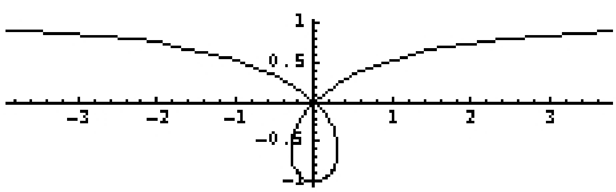
(A) À cause de la parité des fonctions *x* et *y*, la courbe (G) est symétrique par rapport à *(y'y)*
(B) La fonction *x* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
(C) La dérivée de *y* est donnée par $y'(t) = \dfrac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)^2}$
(D) $y'(t)$ s'annule sur $\mathbb{R}_+$ en $t_0 = \sqrt{\sqrt{5}-2}$
(E) Sur $\mathbb{R}_+$ la fonction *y* a pour tableau de variation :

t	0	t_0	$+\infty$
y	0 ↘	$y(t_0)$ ↗	$+\infty$

Question 17

(Seulement pour les candidats de l'options génie mécanique)

(A) Quand t tend vers $+\infty$ la courbe (G) admet une asymptote d'équation $y=1$
(B) Au point de coordonnées (0,0), la courbe (G) admet deux tangentes orthogonales.
(C) Au point associé au paramètre $t_0 = \sqrt{\sqrt{5}-2}$, la courbe(G) admet une tangente verticale.
(D) La courbe (G) a l'allure suivante :



(E) Une équation cartésienne de (G) est $x(x^2+y^2)+x^2-y^2=0$