

**BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS**

**- SESSION 1999 -**

**ÉPREUVE  
DE MÉCANIQUE**

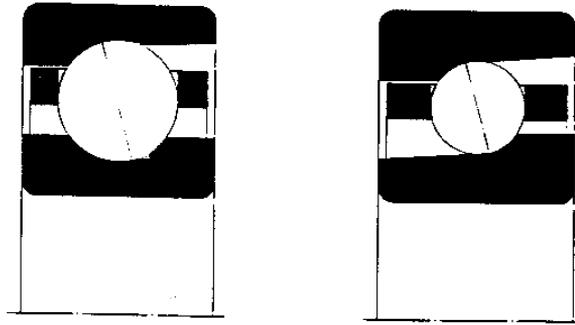
*CODE ÉPREUVE : BE-MECA*

**CALCULATRICE INTERDITE**

**DURÉE : 2h30**

**QUESTION 1**

Les constructeurs de roulements proposent des séries spéciales, avec des billes plus petites, pour les grandes vitesses de rotation :



**Roulements à billes à contact oblique, exécution CD et exécution «grande vitesse» avec des billes plus petites.**

Il s'agit ici de justifier l'intérêt de billes plus petites et en céramique (nitrure de silicium) pour les grandes vitesses de rotation des roulements. On a ci-dessus le dessin d'un roulement avec billes en acier à gauche et avec billes en céramique à droite. On notera 0 un repère fixe, 1 un repère associé à la bague intérieure, 2 un repère associé à la bille, 3 un repère associé à la bague extérieure, 4 un repère associé à la cage. On notera  $w_{i/j}$  la vitesse de rotation de la pièce  $i$  par rapport à la pièce  $j$ . Le diamètre des billes en acier est de 12,7 mm, celui des billes en céramique de 7,98 mm. La masse de 100 billes en acier est de 0,842 kg (données SKF 1992). Le rayon du centre de bille, en acier ou en céramique, comptée depuis le centre du roulement est de 45 mm. Le roulement tourne à 15 000 tours/min. Les billes en céramique ont une densité de 3,2. La densité de l'acier doit être connue.

- (A) les billes plus petites limitent les efforts de contacts entre les billes et la bague extérieure
- (B) on peut affirmer que les mouvements des pièces du roulement correspondent à la loi suivante :  $w_1/0 - \dots w_3/0 + (\dots - 1) \cdot w_4/0 = 0$  avec  $\dots =$  diamètre de bille
- (C) L'effort de contact du à la force centrifuge pour les billes en acier vaut 171 N
- (D) L'effort de contact du à la force centrifuge pour les billes en céramique vaut 71 N
- (E) L'effort de contact du à la force centrifuge pour les billes en céramique vaut 2271 N

## QUESTION 2

Imaginons une voiture en virage. On la regarde par dessus pendant qu'elle tourne. Ce sont les roues avant qui sont directrices.

- (A) on peut dire que le mouvement de la voiture par rapport au sol est un mouvement de translation circulaire
- (B) on peut dire que le mouvement de la voiture par rapport au sol est un mouvement de rotation
- (C) on peut dire que les roues arrières restent parallèles pendant que la voiture tourne
- (D) on peut dire que les roues avant restent parallèles pendant que la voiture tourne
- (E) on peut dire que la vitesse de rotation des roues arrières par rapport à la voiture sont différentes

### QUESTION 3

On considère un acier utilisé pour la fabrication des roulements, le 100C6.

- (A) 100 signifie que cet acier contient 0,1 % de carbone
- (B) Un ordre de grandeur de sa résistance élastique, après trempe, est 100 MPa
- (C) C signifie que cet acier contient du chrome
- (D) 6 signifie que cet acier contient 6 % de l'élément C
- (E) C signifie que cet acier contient du cobalt

### QUESTION 4

On souhaite construire une liaison pivot entre un arbre et un carter. Pour un diamètre nominal de 25 mm, l'ajustement H7f6 définit un jeu mini de 20 micromètres et un jeu maxi de 62 micromètres. Etant donné l'encombrement, la longueur de guidage possible est de 42 mm. L'arbre doit avoir un diamètre de 25 mm après calcul de résistance des matériaux.

- (A) Si on construit la liaison sur coussinet, l'ordre de grandeur du rotulage entre l'arbre et le carter sera de  $1^\circ$ .
- (B) Si on construit la liaison sur coussinet, étant donné les dimensions envisageables, on peut modéliser son comportement cinématique par une liaison linéaire annulaire.
- (C) Si on construit la liaison sur roulements à billes à contact radial, on peut admettre  $1^\circ$  de rotulage au droit des roulements.
- (D) Si on monte deux roulements à rouleaux coniques disposés en X, on aura augmenté la longueur de guidage.
- (E) Si on construit la liaison sur roulement à rouleaux, on peut admettre  $1'$  d'arc de rotulage au droit des roulements.

### QUESTION 5

On se propose d'étudier l'équilibre statique d'un piston de section  $S$  lorsque celui-ci est utilisé pour comprimer puis pour détendre un gaz. Au cours de ces deux phases, le gaz exerce une pression  $P$  sur l'une des deux faces du piston. On note  $F$  l'effort appliqué par l'utilisateur sur la face opposée;  $x$  est un axe horizontal, il représente l'axe du piston. On négligera les frottements dans cette étude.

- (A) L'utilisateur applique un même effort  $F$  en compression et en détente.
- (B) Au cours de la phase de compression, le travail élémentaire de l'effort  $F$  pour un déplacement du piston est égal à  $PdV$  où  $dV$  est le volume élémentaire de gaz déplacé.
- (C) Ce travail est négatif.
- (D) Au cours de la phase de détente, le travail élémentaire de l'effort  $F$  pour un déplacement du piston est aussi égal à  $PdV$ .
- (E) Ce travail est positif.

## QUESTION 6

Considérons l'ensemble schématisé ci-dessous. Cet ensemble est constitué de deux masses  $M_1$  et  $M_2$  fixées sur une barre rigide de masse négligeable. La barre est simplement appuyée à l'une de ses extrémités et soumise à l'action combinée d'un ressort de rappel et d'un fil sous tension à l'autre extrémité. Le ressort est de raideur  $k$  et son action est nulle lorsque la barre est en position d'équilibre horizontale. Le fil est enroulé sur une poulie et mis sous tension à l'aide d'une masse  $M$  (les frottements entre le fil et la poulie sont négligeables).

I/ Etude statique de la barre . On ne tiendra pas compte de l'action du ressort.

- (A) La réaction du support sur la barre en  $x=0$  est  $R = (\frac{M_1}{4} + \frac{M_2}{2})gz$ .
- (B) Afin d'équilibrer l'ensemble en position horizontale, la masse  $M$  doit valoir  $\frac{3M_1}{4} + \frac{M_2}{2}$ .
- (C) La somme des travaux des forces agissant sur la barre est identiquement nulle pour un déplacement  $w = wz$  de la masse  $M$ .

II/ Etude dynamique de la barre. On tiendra compte ici de l'action du ressort. On se placera dans l'hypothèse de très petits mouvements d'angle  $\ddot{\theta}$  autour de l'axe  $y$ , on notera  $I$  le moment d'inertie de la barre en  $O$ .

- (D) L'équation de mouvement de la barre est  $L(\frac{3M_1}{4} + \frac{M_2}{2})g - \frac{L}{2}M_2g - \frac{L}{4}M_1g - kL\ddot{\theta} = I\ddot{\theta}$ .
- (E) La pulsation propre de l'ensemble est  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$ .

## QUESTION 7

Considérons l'élément de structure schématisé ci-dessous. Il est composé de deux barres articulées à leurs extrémités. Aux points A et B, les translations sont complètement bloquées et en C, un effort orienté, de module F, est appliqué. Les barres sont supposées homogènes, élastiques et isotropes, de module d'Young E et de section S.

- (A) L'effort normal dans la barre (1) est  $N_1 = 2F(\cos \theta + \sin \theta)/(1 + \sqrt{3})$ .
- (B) L'effort normal dans la barre (2) est maximum pour  $\theta = \pi/4$ .
- (C) Pour  $\theta = 0$ , la réaction en B est  $R_B = -\sqrt{3}F\vec{x}_0 + \sqrt{3}F\vec{z}_0$ .
- (D) L'allongement maximum de la barre (1) est  $L_{\max} = \frac{\sqrt{32}LF}{(3 + \sqrt{3})ES}$ .
- (E) La variation maximale de longueur est la même pour les deux barres.

## QUESTION 8

Une masse ponctuelle m est mobile sans frottement sur un cercle vertical fixe (C), contenu dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , de centre O et de rayon R. Sa position est définie à chaque instant par un angle  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{OM})$ ,  $\vec{OM}$  étant son vecteur position.

- (A) La vitesse relative de m est nulle.
- (B) La vitesse d'entraînement de m est  $\vec{V}_e = R \dot{\theta} \vec{v}$ , avec  $\vec{v} = -\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0$ .
- (C) L'accélération de m est  $\vec{a} = R \ddot{\theta} \vec{v}$ .
- (D) Le mouvement de m vérifie  $g \cos \theta + R \ddot{\theta} = 0$ .

L'intégration de cette équation donne  $R \dot{\theta}^2 = -2g \sin \theta + C$ ; C étant une constante.

- (E) La masse  $m$  est soumise à une réaction  $F_R$ , normale à (C), telle que  $F_R = m(3g \sin - C)$ .

### Question 9

Dans le repère orthonormé direct  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on définit le torseur  $T$   $\begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{matrix}$  ( $\vec{R}$  résultante du torseur,  $\vec{M}(A)$  moment du torseur au point A) tel que:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{M}(A) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (A) L'invariant scalaire de ce torseur est égal à -14.
- (B) Le moment du torseur au point B  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est:  $\vec{M}(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ .
- (C) L'axe central du torseur passe par le point P  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- (D) L'axe central du torseur est une droite dirigée par le vecteur unitaire:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (E) Le torseur T est équivalent à un glisseur.

### Question 10

On considère une poutre de Bernouilli, en matériau homogène, isotrope de module d'Young  $E$ . Le poids propre de la poutre est négligeable. Sa section droite est rectangulaire et on note  $I$  son moment quadratique par rapport à l'axe  $\vec{z}$ . La longueur de la poutre est  $2L$ . Elle est soumise à 2 efforts ponctuels de même intensité  $P$  ( $P > 0$ ) et est simplement appuyée en A et C. Les positions des différents points ainsi que les dimensions de la section sont données sur le schéma.

(A) Les réactions aux appuis A et C sont:

$$\vec{R}_A = \frac{P}{4} \vec{y}$$

$$\vec{R}_C = \frac{7P}{4} \vec{y}$$

(B) Les sections droites de la poutre soumises à un effort tranchant maximum en valeur absolue se trouvent entre les points B et C.

(C) La section droite située à  $x = \frac{5}{6}L$  est soumise à un moment fléchissant nul.

(D) Les sections droites situées entre les points O et A sont soumises à de la flexion pure.

(E) La contrainte de traction maximum induite par la flexion dans la poutre est égale à:

$$= \frac{PLh}{4I}$$

### Question 11

On considère le bras robot dont le schéma cinématique est donné ci-dessous. Ce mécanisme est constitué :

d'un bâti  $S_0$

d'un axe  $S_1$  en liaison pivot avec le bâti  $S_0$ .

d'un bras  $S_2$  en liaison pivot avec l'axe  $S_1$ .

d'un avant-bras  $S_3$  muni d'une pince à son extrémité et en liaison pivot glissant avec le bras  $S_2$ .

A chaque solide  $S_i$  (pour  $i = 0, 1, 2, 3$ ), on lie un repère noté  $R_i(O, x_i, y_i, z_i)$  tels que (voir schéma) :

-  $z_0$  soit vertical ascendant.

-  $(O, z_1) = (O, z_0)$  : axe de la liaison pivot 0 – 1.

-  $(O, x_2) = (O, x_1)$  : axe de la liaison pivot 1 – 2.

-  $(O, y_3) = (O, y_2)$  : axe de la liaison pivot glissant 2 – 3.

Hypothèse : Toutes les liaisons du mécanisme sont supposées parfaites.

On paramètre le système de la façon suivante (voir schéma) :

mouvement de  $S_1/S_0$  :  $\varphi_1 = (x_0, x_1)$

mouvement de  $S_2/S_1$  :  $\varphi_2 = (y_1, y_2)$

mouvement de  $S_3/S_2$  :  $y = OM_3$   $y_{2,3}$  et  $\varphi_3 = (z_2, z_3)$

Le solide  $S_2$  a pour masse  $m_2$  et pour centre d'inertie  $G_2$  tel que  $OG_2 = b y_{2,3}$ .

Le solide  $S_3$  a pour masse  $m_3$  et pour centre d'inertie  $G_3$  tel que  $M_3G_3 = -a y_{2,3}$ .

Remarque : Le schéma cinématique est dessiné dans la position particulière où  $\theta_1 = 0$ .

(A) Le degré de mobilité du mécanisme est égal à 3.

(B) La vitesse du point  $M_3$  par rapport au bâti exprimée dans la base 2 est égale à :

$$V^0(M_3) = \begin{pmatrix} -y_1 \cos \theta_2 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_2$$

(C) Pour calculer l'accélération du point  $M_3$  par rapport au bâti, on utilise la méthode de composition des mouvements en passant par le mouvement de  $M_3$  par rapport à  $S_2$ . L'accélération relative de  $M_3$  exprimée dans la base 2 est alors :

$${}^2(M_3) = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_2$$

(D) Son accélération de Coriolis exprimée dans la base 2 est égale à :

$${}_{\text{Cor}}(M_3) = 2 \begin{pmatrix} -y_1 \cos \theta_2 \\ 0 \\ y_2 \end{pmatrix}_2$$

(E) La trajectoire du point  $M_3$  par rapport à 0 peut être exprimée en fonction des paramètres de mouvement de la façon suivante :

où sont les coordonnées du point  $M_3$  dans le repère .

### Question 12

Le torseur des actions mécaniques exercées par le solide  $S_2$  sur le solide  $S_3$  au point  $M_3$  est de la forme :

$$F_{2/3}$$

- (A) Les théorèmes de la Résultante Dynamique et du Moment Dynamique appliqués au solide  $S_3$  s'écrivent :

où :  $R_{A/3}$  est la résultante de tous les efforts extérieurs s'exerçant sur  $S_3$   
 $M_{A/3}$  est le moment résultant de tous les efforts s'exerçant sur  $S_3$   
 $C_{y_{2,3}}$  est le moment dynamique du solide  $S_3$  en  $G_3$  dans son mouvement par rapport à  $S_2$ .

- (B) Deux actionneurs montés entre les solides  $S_2$  et  $S_3$  exercent sur  $S_3$  un torseur d'actions mécaniques noté :

$$F_{A/3} \quad \begin{matrix} F_{A/3} = F_{y_{2,3}} \\ M_{A/3}(M_3) = C_{y_{2,3}} \end{matrix}$$

La pince liée à  $S_3$  tient un solide de masse  $M$  dont le centre d'inertie est positionné en  $M_3$ .

- (C) La résultante des efforts extérieurs s'exerçant sur  $S_3$  est :

$$F_{\text{ext}/3} = F_{y_2} - (m_3 + M)g z_0$$

- (D) Le torseur des actions mécaniques exercées par le solide  $S_1$  sur le solide  $S_2$  au point  $G_2$  est de la forme :

$$F_{1/2} \quad \begin{matrix} X_{12} \\ F_{1/2} = Y_{12} \\ Z_{12} \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} M_{1/2}(G_2) = M_{12} \\ N_{12} \end{matrix}$$

- (E) Le moment résultant des efforts extérieurs s'exerçant sur  $S_3$  en  $M_3$  est égal à :

$$M_{\text{ext}/3}(M_3) = \begin{matrix} m_3 g a \cos \alpha_2 + L_{23} \\ C \\ N_{23} \end{matrix} \quad 2$$