Banque d'Épreuves – 1999

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Avertissement :

Tous les candidats doivent traiter les questions de 1 à 11.

Les questions 12 et 13 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique .

Les questions 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie informatique.

Les questions 16 et 17 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

On fixe deux nombres réels a et b, ***strictement positifs tels que*** $a > b > 0$, et on considère la fraction rationnelle f définie par $f(x) = \dfrac{2(a^2+b^2)x^2}{x^4+(a^2-b^2)\,x^2-a^2b^2}$

Question 1

(A) Le dénominateur de f s'annule en $+b$ et $-b$

(B) $f(x) = \dfrac{2(a^2+b^2)x^2}{(x^2-a^2)(x^2+b^2)}$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\, f(x) = 0$

(D) $\int_0^a f(x)dx$ *converge*

(E) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge*

Question 2

(A) La décomposition en éléments simples de $f(x)$ comprend le terme $\dfrac{b}{x-b}$

(B) $f(x) = \dfrac{b}{x-b} - \dfrac{b}{x+b} + \dfrac{a^2}{(x^2+a^2)}$

(C) $F(x) = b\,\mathbf{ln}\left(\dfrac{x-b}{x+b}\right) + 2\,\mathbf{arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est une primitive de $f(x)$ sur l'intervalle $]b, +\infty[$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

(E) Si $a = 2b$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = b\left(\dfrac{\pi}{4} + \mathbf{ln}\,3\right)$

On considère un paramètre réel donné a et les équations différentielles

(E) $y''(t) - 2\,a\,y'(t) + (a^2+1)y(t) = \cos t$

et (H) $y''(t) - 2\,a\,y'(t) + (a^2+1)y(t) = 0$ (équation "sans second membre" associée)

Question 3

(A) L'équation caractéristique de (H) est $r^2 - 2\,ar + (a^2+1) = 0$

(B) Les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = a-1$ et $r_2 = a+1$

(C) La solution générale de l'équation (H) est $y(t) = A\,\mathbf{exp}[a\,t]\,\mathbf{cos}(t-\varphi)$, avec A, φ dans $\mathbb{R}$

(D) Si $a > 0$ et si f est une solution de (H), alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$

(E) Pour toute valeur de a, les solutions de (H) sont périodiques.

Question 4

(A) Si $a = 0$, il existe une solution de (E) de la forme $y(t) = A\cos t + B\sin t$, avec A, B dans $\mathbb{R}$

(B) Si $a \neq 0$, $y(t) = A\cos t + B\sin t$ avec A, B dans $\mathbb{R}$, est solution de (E)

si et seulement si $\begin{cases} Aa^2 - 2aB = 1 \\ 2aA - a^2B = 0 \end{cases}$

(C) Si $a \neq 0$, $y(t) = \dfrac{\cos t}{a^2+4} - \dfrac{2\sin t}{a(a^2+4)}$ est une solution particulière de (E)

(D) Si $a \neq 0$ la solution générale de (E) est de la forme

$y(t) = C\,\mathbf{exp}[at]\cos t + D\,\mathbf{exp}[at]\sin t + \dfrac{\cos t}{a^2+4} - \dfrac{2\sin t}{a(a^2+4)}$ avec C, D dans $\mathbb{R}$

(E) Quel que soit a $\mathbb{R}$, il existe une unique solution de (E) vérifiant $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

On dispose de trois urnes appelées U, V et W . U comprend quatre boules marquées v et une marquée w . L'urne V comprend neuf boules blanches, et une noire, l'urne W comprend quatre boules blanches, trois noires et trois jaunes . On tire au hasard une boule de l'urne U ; si la boule tirée est marquée v, on tire alors au hasard une deuxième boule de l'urne V ; si elle est marquée w, on tire au hasard une deuxième boule de l'urne W.
On note V l'événement : "la première boule tirée est marquée v" , B l'événement :"la deuxième boule tirée est blanche" , N l'événement : "la deuxième boule tirée est noire" , et J l'événement : "la deuxième boule tirée est jaune".
On note $\mathbf{P}$(E) la probabilité de l'événement E , et $\mathbf{P_F}$(E) la probabilité de E sachant que l'événement F est réalisé (elle se note aussi $\mathbf{P}(E|F)$). $\bar{\text{E}}$ est l'événement contraire de E.

Question 5

(A) $\mathbf{P}(V)=\frac{1}{2}$

(B) $\mathbf{P}_V(J)=0$

(C) $\mathbf{P}_{\bar{V}}(J)=1$

(D) Les évènements V et J sont indépendants.

(E) Les évènements W et J sont incompatibles.

Question 6

(A) $\mathbf{P}_V(N)=\frac{1}{10}$

(B) $\mathbf{P}_{\bar{V}}(N)=\frac{9}{10}$

(C) $\mathbf{P}(N)=\frac{4}{10}$

(D) $\mathbf{P}(N)=\frac{7}{50}$

(E) $\mathbf{P}_{\mathrm{N}}(V)=\frac{4}{7}$

On considère la suite $(u_n)_{n}$ Å définie pour tout $n \geq 2$ par: $u_2=\mathbf{cos}\frac{\pi}{4}$ et $u_n=u_{n-1}\mathbf{cos}\frac{\pi}{2^n}$

On pose pour tout $n \geq 2$ $v_n=u_n \mathbf{sin}\frac{\pi}{2^n}$

Question 7

(A) La suite $(u_n)_{n}$ Å est strictement décroissante.

(B) $(u_n)_{n}$ Å est une suite géométrique.

(C) On a pour tout $n \geq 3$ $v_n=\frac{v_{n-1}}{2}$

(D) On a pour tout $n \geq 2$ $u_n=\dfrac{2}{2^n \mathbf{sin}\frac{\pi}{2^n}}$

(E) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=\frac{1}{\pi}$

Question 8

(A) La série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n z^n$ a pour rayon de convergence 1.

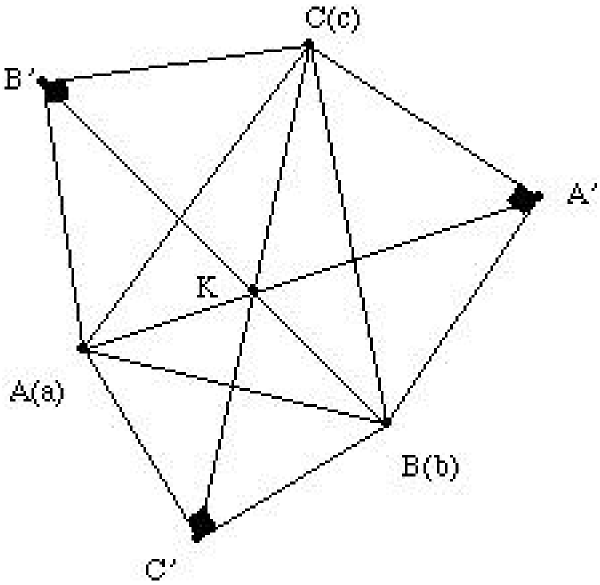
(B) Si on appelle $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} v_n x^n$ la somme de la série entière quand celle-ci converge, alors

$f(x)=\dfrac{2x}{2-x}$

(C) $f(1)=1$

(D) La série entière $g(x)=\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{2^{n-1}}$ a pour rayon de convergence 2.

(E) La somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}} = \dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}+\ldots+\dfrac{n}{2^{n-1}}+\ldots$ est 3.



Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct , on se donne trois points non alignés **A** d'affixe a, **B** d'affixe b, et **C** d'affixe c, tels que le triangle (**A**,**B**,**C**) est parcouru dans le sens direct. (voir figure ci-contre)
À l'extérieur de ce triangle, on construit trois triangles rectangles respectivement en **A'**,**B'**,**C'** et isocèles (**C**,**B**,**A'**), (**A**,**C**,**B'**), (**B**,**A**,**C'**).
On a donc $\widehat{\mathbf{BCA'}}$, $\widehat{\mathbf{CAB'}}$, $\widehat{\mathbf{ABC'}}$ qui sont trois angles de mesure $+\dfrac{\pi}{4}$
On trace les droites (**AA'**), (**BB'**), et (**CC'**) .
On appelle **K** l'intersection de (**AA'**) et (**BB'**) .
On pose $\omega=\dfrac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+i}{2}$
Si un point **M** a pour affixe z, on le note **M**(z).

Question 9

(A) L'image **M'**(z') d'un point **M**(z) dans une similitude directe d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de centre **S**(s) est d'affixe $z'=\omega z+(1-\omega)s$

(B) L'affixe *b'* de **B'** est $b'=\omega c+(1-\omega)a$

(C) L'affixe *a'* de **A'** est $a'=\omega c+(1-\omega)b$

(D) Le vecteur $\overrightarrow{B'C'}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{B'C'}}=(2\omega-1)a+(1-\omega)b-\omega c$

(E) Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AA'}}=-a+\omega b+(1-\omega)c$

Question 10

(A) On a $\omega^2=2i$

(B) $z_{\overrightarrow{B'C'}}=-i\,z_{\overrightarrow{AA'}}$

(C) Les droites (**AA'**) et (**B'C'**) ne sont pas en général perpendiculaires.
(D) Le point **K** est toujours l'orthocentre du triangle (**A'**,**B'**,**C'**)
(E) Le point **K** est toujours le centre de gravité du triangle (**A'**,**B'**,**C'**)

On fixe deux nombres réels stictement positifs a et b , et l'on considère la fonction $x \mapsto \boldsymbol{f(x)}$ définie pour x >0 par $\mathbf{f}(x)=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Dans les développements limités, la notation ε représente une fonction qui tend vers 0 en 0, et qui n'est pas nécessairement la même dans chaque formule.

On rappelle les deux développements limités usuels à l'ordre 2 en 0 : $\begin{cases} \boldsymbol{exp}\, x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\ \boldsymbol{ln}(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \end{cases}$

Question 11

(A) $a^x = 1 + x\,\boldsymbol{ln}\,a + \dfrac{x^2}{2}\,\boldsymbol{ln}\,a + x^2\varepsilon(x)$

(B) $\dfrac{a^x+b^x}{2} = 1 + x\,\boldsymbol{ln}\sqrt{ab} + \dfrac{x^2}{4}(\boldsymbol{ln}^2 a + \boldsymbol{ln}^2 b) + x^2\varepsilon(x)$

(C) $\boldsymbol{ln}\, f(x) = \boldsymbol{ln}\sqrt{ab} + \dfrac{x}{4}(\boldsymbol{ln}^2 a + \boldsymbol{ln}^2 b) + x\varepsilon(x)$

(D) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{ab}{2}$

(E) $f(x) = \sqrt{a\,b}\left(1 + \dfrac{(\mathbf{ln}\,a - \mathbf{ln}\,b)^2}{(\mathbf{ln}\,a + \mathbf{ln}\,b)}\,\dfrac{x}{8}\right) + x\varepsilon(x)$

Les questions 12 et 13 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique .

Les questions 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie informatique.

Les questions 16 et 17 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

On note $\boldsymbol{f}$ la fonction paire, de période 2, avec $\begin{cases} f(x) = 1 - 2|x| \ si\ -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ f(x) = 0 \ si\ \dfrac{1}{2} < |x| \le 1 \end{cases}$

et $\boldsymbol{S}$(x) la série de Fourier de $\boldsymbol{f}$ de la forme $\mathbf{S}(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n\,\mathbf{cos}(n\pi x) + b_n\,\mathbf{sin}(n\pi\, x))$

Question 12

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique)

(A) La fonction $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$

(B) La fonction $\boldsymbol{f}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$

(C) $a_0 = \dfrac{1}{2}$

(D) Quelquesoit n ≥1**,** $b_n = 0$

(E) Si n≥1, alors $a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}\left(1 - \mathbf{cos}\,\dfrac{n\pi}{2}\right)$

Question 13

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique)

(A) Si n est pair $\boldsymbol{cos}\dfrac{n\pi}{2}=1$

(B) Quel que soit le réel x, $\boldsymbol{S}(x)$ converge vers $\boldsymbol{f}(x)$

(C) $f(0)=1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{p^2}$

(D) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p-1}{p^2}$

(E) $\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{p^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ définies par la relation de récurrence :

(R) $\begin{cases} u_{n+2}= u_{n+1}+ u_n + v_n \\ v_{n+1}= u_{n+1}- u_n + v_n \end{cases}$ les valeurs de u_0 , u_1 et v_0 étant précisées par la suite.

Soit la matrice 3×3, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. On pose $X_n=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\\ v_n\end{pmatrix}$

Question 14

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

(A) La relation de récurrence peut s'exprimer matriciellement $\mathbf{X}_{n+1}=\mathbf{A}\,\mathbf{X}_n$

(B) La matrice A a pour polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(\lambda)=(1-\lambda^2)(\lambda+2)$

(C) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{A}$.

(D) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{A}$.

(E) $\mathbf{A}$ est une matrice diagonalisable.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie informatique)

(A) Si $u_0=-1$, $u_1=-1$, $et\ v_0=1$, $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ sont des suites constantes.

(B) Si $u_0=1$, $u_1=-1$, $et\ v_0=1$, la suite $(u_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique.

(C) Si $u_0=1$, $u_1=2$, $et\ v_0=1$, la suite $(u_n)_{n\in N}$ est telle que $u_n=\dfrac{3^{n+1}}{4}-\dfrac{(-1)^n}{4}$

(D) Si $u_0=v_0$ alors pour tout n, $u_n=v_n$

(E) Si $u_0=1$, $u_1=1$, $et\ v_0=1$ alors pour tout n, $u_n=v_n=2^{n+1}+(-1)^n-2$

On se propose de trouver quelques propriétés de la courbe C dont la représentation paramétrique dans un repère du plan est : $\begin{cases} x(t) = \cos t - \cos^2 t \\ y(t) = \sin t - \sin t \cos t \end{cases}$, avec t $\in$ [-π , +π]

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)

(A) Pour t $\in$ [-π , +π] , $x(-t) = x(t)$

(B) La courbe C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées .

(C) Pour t $\in$ [-π , +π] $\begin{cases} x'(t) = \sin t(2\cos t - 1) \\ y'(t) = (2\cos t + 1)(1 - \cos t) \end{cases}$

(D) $x(t)$ admet un minimum pour $t = \dfrac{\pi}{3}$

(E) La courbe C admet une tangente verticale au point A decoordonnées $\left(\dfrac{1}{4} ; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Question 17

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique)

(A) La coube C admet une tangente horizontale au point B decoordonnées $\left(\dfrac{-3}{4} ; \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

(B) Quel que soit t $\in$ [-π , +π] , $|y(t)| \le \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

(C) $x(t)$ admet un extremum local pour $t = 0$

(D) $y(t)$ admet un extremum local pour $t = 0$

(E) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$