C O N C O U R S A T S
-SESSION 2016-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On considère l'ensemble U des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour un $u \in U$ les deux premiers termes u_0 et u_1 sont donnés. La suite nulle définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ appartient à U.

1. Montrer que si $a \in U$, $b \in U$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $a + b \in U$ et $\alpha a \in U$.

   En déduire que U est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Soient c et d les deux suites appartenant à U telles que $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $d_0 = 0$, $d_1 = 1$.

   (a) Montrer que (c, d) est une base de U.

   (b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel U ?

3. (a) Montrer qu'il existe deux réels distincts et non nuls ρ et σ que l'on calculera, avec $\rho < 0 < \sigma$, tels que les suites géométriques $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à U.
   On notera r et s les suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \rho^n$ et $s_n = \sigma^n$.

   (b) Montrer que (r, s) est une autre base de U.

4. (a) Si v est la suite de U telle que $v_0 = x$, $v_1 = y$, donner en fonction de x et y les composantes de v dans la base (r, s).

   (b) En déduire une formule générale de v_n en fonction de n (sans utiliser la formule de récurrence).

   Les deux questions d'informatique suivantes peuvent être rédigées au choix en pseudo-code ou en Scilab.

5. (a) Écrire une procédure informatique `F` ayant pour variables d'entrée deux réels `x`, `y` et un entier naturel `n` et qui renvoie le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 =$x et $v_1 =$y.
   La fonction `F` utilisera la relation de récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$ dans une boucle ou de manière récursive.

   (b) Écrire une procédure informatique `G` ayant également pour variable d'entrée deux réels `x`, `y` et un entier naturel `n` et qui renvoie aussi le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 =$x et $v_1 =$y, mais sans faire de boucle (en utilisant la formule établie à la question 4.b).

   (c) Expliquez quelle est, entre `F` et `G`, la fonction la plus efficace pour calculer v_n ?

Exercice 2

On considère un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et un endomorphisme f de E ayant pour matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{U}$.

1. (a) Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$.
   (c) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de $\mathbf{A}$. On choisira $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (d) Déterminer des vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 de $\mathbf{A}$ associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et tels que leur première composante soit égale à 1.
   (e) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.

2. (a) Donner une matrice diagonale $\mathbf{D}$ et une matrice inversible $\mathbf{P}$, tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.
   (b) Calculer l'inverse $\mathbf{P}^{-1}$ de $\mathbf{P}$.

3. Calculer $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif, on a

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix},$$

   où les a_n sont les termes consécutifs d'une même suite. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner a_1, a_2 et a_3.

5. (a) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, avec $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Diagonaliser $\mathbf{B}$ en déterminant une matrice inversible $\mathbf{Q}$ et une matrice diagonale Δ avec $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\Delta\mathbf{Q}^{-1}$.
   (c) Calculer l'inverse $\mathbf{Q}^{-1}$ de $\mathbf{Q}$.
   (d) Pour tout entier strictement positif n, calculer $\mathbf{B}^n$ en fonction de n.

6. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.
   (b) Donner une expression de a_n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 3

Soit la fonction $f :]0,+\infty[\times]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{\ln\left(1+xy^2\right)}{y^2}$$

et la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\ln\left(1+xy^2\right)}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

On se propose de calculer une expression de $g(x)$, puis de $g'(x)$. On calcule ensuite $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ puis l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y$ que l'on comparera à $g'(x)$.

1. (a) Pour un x positif fixé, montrer que $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln\left(1+xy^2\right)}{y^2} = x$.

   (b) Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale définissant g ?

2. (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que l'on précisera, l'égalité :

$$g(x) = -\ln(1+x) + 2x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}.$$

   (b) À l'aide d'un changement de variable montrer qu'il existe deux fonctions à préciser a et b dépendant de x, telles que :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} = a(x)\int_0^{b(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

   (c) En déduire une expression de $g(x)$ sans intégrale.

   (d) En déduire une expression de $g'(x)$ (également sans intégrale).

3. (a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\ln\left(1+xy^2\right)}{y^2}\right)$.

   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y$.

   (c) Que remarque-t-on ?

Exercice 4

On considère la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $]-\pi,\pi]$ par

$$g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ 0 & \text{si } t \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction g entre -3π et 3π.
2. Quelle est la parité de la fonction g? Justifiez votre réponse.
3. La série de Fourier de g est notée

$$Sg(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big).$$

   (a) Donner les coefficients b_n, pour tout entier n strictement positif.

   (b) Calculer a_0 et a_1.

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a

$$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

   (d) En déduire que si n est impair et $n \neq 1$, alors $a_n = 0$.

   (e) Montrer que si $n = 2p$ est un entier pair non nul, alors

$$a_{2p} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}.$$

4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g.

   (a) A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = Sg(t)$? Justifier précisément votre réponse.

   (b) Montrer que

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \cos t = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2-1)} \cos(2pt).$$

   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$.

5. (a) Appliquer l'identité de Parseval à la fonction g.

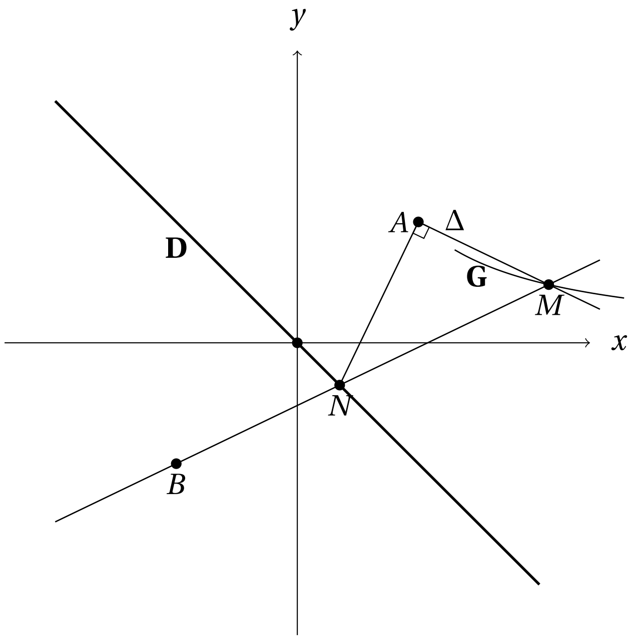
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4p^2-1}\right)^2$.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(1,1)$, $B(-1,-1)$ et la droite $\mathbf{D}$ d'équation $y = -x$.

Pour un point N de $\mathbf{D}$ de coordonnées $(t,-t)$, on considère la droite (BN), la droite (AN), et la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN).

Le point M est l'intersection, si elle existe, de la droite (BN) et de la droite Δ .



1. En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite (BN).
2. En fonction de t, donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AN}$.
3. En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN).
4. Pour quelles valeurs de t les droites (BN) et Δ sont-elles parallèles ? On trouvera deux valeurs notées dans la suite t_1 et t_2.
5. Calculer en fonction de t les coordonnées du point M en résolvant le système formé par les équations des droites (BN) et Δ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$.

   On appelle désormais **G** la courbe décrite par M quand N parcourt la droite D.
6. On note $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions telles que :

$$u(t) = \frac{t+1}{-t+1} = \frac{2}{-t+1} - 1 \text{ et } v(t) = \frac{-t+1}{t+1} = \frac{2}{t+1} - 1$$

   .

   (a) Préciser les domaines de définition de u et v.

   (b) Calculer les dérivées de u et v et préciser les sens de variation de u et v sur chaque intervalle où elles sont définies.

   (c) Donner un tableau des variations conjointes de u et v en précisant leurs limites aux extrémités de chaque intervalle des domaines de définition. On ne demande pas de représentation graphique de u et de v

   (d) En déduire une représentation graphique de **G**, l'ensemble des points M.
7. (a) Le point A appartient-il à **G** ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?

   (b) Le point B appartient-il à **G** ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
8. (a) Calculer $u(t)v(t)$. Que remarque-t-on ?

   (b) On appelle **H** la courbe d'équation cartésienne : $y = \dfrac{1}{x}$.

   Peut-on déduire de ce qui précède que **G** est la courbe **H** dont on a retiré un ou plusieurs points ? Quel(s) point(s) retirer à **H** pour obtenir **G** ?