Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices et le problème sont indépendants .

La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soit la fonction f , 2π-périodique, telle que $\quad x \quad [-\pi,\pi]$, $f(x)=|x|$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de *f*. Montrer que *f* est égale à la somme de sa série de Fourier.

2) A l'aide du théorème de Parseval, déterminer la somme $V=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$

3) On pose $U=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Exprimer U à l'aide de V et en déduire la valeur de U.

Exercice 2

Soit le polynôme défini pour tout entier naturel non nul n par:

$$P_n(x)=C_{2n+1}^{1}x^{n}-C_{2n+1}^{3}x^{n-1}+C_{2n+1}^{5}x^{n-2}-\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}(-1)^{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{2n+1}^{2k+1}x^{n-k}$$

On rappelle que la fonction cotangente est définie par $\operatorname{cotan}(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ pour x tel que $\sin x\neq 0$

1) Soit un polynôme de degré n : $Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ ayant comme racines $\{x_1,\ldots,x_n\}$ (distinctes ou non). Donner une expression de la somme des racines à l'aide de a_n et a_{n-1} .

2) On prend $t \quad \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. En calculant de deux manières la partie imaginaire de $\frac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1}t}=\frac{(\cos t+i\sin t)^{2n+1}}{\sin^{2n+1}t}$ montrer que $P_n\left(\operatorname{cotan}^2(t)\right)=\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}t}$

3) Monter que P_n a n racines distinctes qui sont $\left\{\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}\,\middle|\,1\leq k\leq n\right\}$

4) En déduire que : $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$.

5) Pour $t\neq k\pi$ (avec k entier relatif) montrer que $1+\operatorname{cotan}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}$. En déduire une expression en fonction de n de: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}$.

6) Pour $t \quad \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $\operatorname{cotan} t\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{\sin t}$, puis que $\operatorname{cotan}^2 t\leq\frac{1}{t^2}\leq\frac{1}{\sin^2 t}$

7) À l'aide des expressions trouvées au 4) et au 5), et de l'encadrement du 6) trouver un encadrement de la forme: $A_n\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq B_n$, dans lequel A_n et B_n s'expriment à l'aide de n et de π.

8) En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^2}$, et la somme $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

Exercice 3

Soit un espace vectoriel euclidien E de dimension 3, muni du repère orthonormé direct B=$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On note $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le produit scalaire et le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On se propose de déterminer l'ensemble H de toutes les applications linéaires f de E dans E telles que pour tout vecteur $\vec{u}$, on ait $\vec{u} \perp f(\vec{u})$ (c'est à dire $\vec{u}.f(\vec{u}) = 0$).

1) Pour $1 \leq k \leq 3$ calculer $\vec{e}_k.f(\vec{e}_k)$. En déduire que la matrice **M** de f dans la base B a tous les termes de sa diagonale qui sont nuls.

2) Si **M** a pour terme général $m_{i,j}$, calculer le produit scalaire $(\vec{e}_i + \vec{e}_j).f(\vec{e}_i + \vec{e}_j)$ et en déduire une relation entre $m_{i,j}$ et $m_{j,i}$. En déduire que la matrice **M** est antisymétrique.

3) Si $\vec{w} \in E$ est fixé, montrer que l'application $f: E \to E$ $f: \vec{u} \to \vec{w} \wedge \vec{u}$ est dans H. Préciser la matrice de f dans la base B en fonction des composantes (p,q,r) du vecteur $\vec{w} \in H$.

4) Montrer réciproquement que si $f \in H$ alors il existe un vecteur $\vec{w} \in E$ à déterminer en fonction des coefficients de la matrice **M** de f tel que $f: \vec{u} \to \vec{w} \wedge \vec{u}$

5) Soit l'endomorphisme g de E ayant dans la base B pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $g \in H$, en précisant le vecteur $\vec{w} \in E$ associé. Préciser la norme de ce vecteur.

6) Déterminer l'unique valeur propre réelle de la matrice A et une base du sous-espace propre associé.

Problème

Soit λ un paramètre réel avec $0 < \lambda < 2$ et les fonctions définies par :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f: x \mapsto 1 - \lambda x^2 \qquad\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g: x \mapsto f(f(x))$$

On étudie des suites numériques définies par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour n≥0 (on notera aussi $x_n = f^n(x_0) = f \circ f \circ \ldots \circ f(x_0)$ avec n termes f). Dans ce problème, on dit que α est un point fixe de la fonction h si $h(\alpha) = \alpha$.

Partie A

Dans cette partie on fixe $\lambda = 1/2$ *et on travaille sur l'intervalle* $I = [0,1]$.

1) Montrer que $f(I) \subset I$ et donc que l'on peut considérer f comme une application $f: I \to I$,

2) Soit $J = [f(1),1]$. Montrer que $f(I) \subset J$, et que $f(J) \subset J$

3) Montrer que f possède un unique point fixe $a \in I$. Calculer a et $f'(a)$.

4) Montrer que $|f'(a)| < 1$ et aussi que $\forall x \in [0,a]$ $-1 < f'(x) \leq 0$

5) Montrer que pour tout réel x de I, $x < a \Rightarrow a < f(x)$, et que $a < x \Rightarrow f(x) < a$

6) Sur un même graphique, placer la courbe représentative C de f, la première bissectrice Δ d'équation $y=x$, et le point d'abscisse a de C. On prend $x_0 = 0$, représenter graphiquement à l'aide de Δ et de C la suite des cinq premiers termes de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ (sans les calculer numériquement). Quel comportement observe-t-on pour cette suite ?

7) Montrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq 1$ et que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq 1$

En déduire que $\forall x \in I$, $|g(x) - a| \leq |x - a|$ (*Indication: utiliser l'inégalité des accroissements finis)*

8) Montrer que si $x_0 < a$ la suite x_{2n} est croissante et a une limite ℓ_1 , la suite x_{2n+1} est décroissante et a une limite ℓ_2. Montrer que $\ell_1 = \ell_2 = a$.

9) En déduire que $\forall x_0 \in I, \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Partie B

Dans cette partie, on fixe $\lambda = 6/5$ *et on travaille sur l'intervalle* $K = [-1,1]$.
On étudie ici les points fixes de l'application $g(x) = f(f(x))$. Pour $x_0 \quad K$, on notera $y_n = g^n(x_0) = x_{2n}$ la suite des itérés de x_0 par g.

1) Montrer que $f(K) \quad K$ .On considère donc g comme application $g : K \to K$.

2) Montrer que f admet un unique point fixe dans l'intervalle K. Calculer ce point fixe qui est noté a dans la suite (sa valeur est distincte de celle trouvée en A 3). Montrer que a est aussi point fixe de g, et que si g possède un autre point fixe b, alors $c = f(b)$ est aussi point fixe de g . Que vaut $f(c)$?

3) On se propose de déterminer les points fixes de g dans K.

3.1- Soit $p(x) = g(x) - x$ *et* $q(x) = f(x) - x$. Montrer que toute racine (réelle ou complexe) du polynôme $q(x)$ est aussi racine du polynôme $p(x)$.

3.2- En déduire que $p(x) = d(x)q(x)$, $d(x)$ étant un polynôme à calculer.

3.3- Calculer les racines de $d(x)$ et montrer que g possède dans K exactement trois points fixes à calculer. Ils sont notés a,b,c.

4) Tracer sur une même figure le graphe Γ de g , la première bissectrice Δ d'équation $y=x$, et les points d'abscisses a,b,c de Γ. Expliquer graphiquement le comportement des suites itérées de terme général $y_n = g^n(x_0) = x_{2n}$ selon la valeur de x_0. Quelle conclusion peut on en tirer sur le comportement de la suite $x_n = f^n(x_0)$?