

### Note au candidat

- La calculatrice programmable ou non est **interdite**. Les applications numériques demandées peuvent être traitées à la main.
- Les vecteurs sont notés en caractères **gras** dans le texte.
- Le sujet est divisé en 3 problèmes indépendants.
- Il est vivement conseillé au candidat de lire préalablement l'intégralité du sujet.
- Il sera tenu compte de la clarté, de la précision ainsi que de la concision de la rédaction.

## PREMIER PROBLEME

### ETUDE DE MACHINES THERMIQUES

#### 1 Etude préliminaire

On considère un système décrivant un cycle thermodynamique durant lequel il est susceptible d'échanger de la chaleur avec une ou deux sources thermiques ainsi qu'un travail avec le milieu extérieur.

On note :

- $U$  et  $S$  respectivement l'énergie interne et l'entropie du système,
- $S_C$  l'entropie créée par le système durant le cycle complet,
- $W$  le travail reçu algébriquement par le système durant le cycle complet.

1.1 Quelles sont les valeurs particulières des variations d'énergie interne  $\Delta U$  et d'entropie  $\Delta S$  du système lorsque celui-ci décrit un cycle complet ?

On commence par traiter le cas particulier d'une machine monotherme échangeant de la chaleur avec une source à la température  $T_1$ . On note  $Q_1$  la chaleur reçue algébriquement par le système en provenance de la source.

1.2 En utilisant les deux premiers principes de la thermodynamique, montrer que dans ce cas le système peut uniquement recevoir du travail et fournir de la chaleur.  
Quel est l'intérêt d'une telle machine ?

1.3 Quelles sont les valeurs de  $S_C, W$  et  $Q_1$  lorsque l'évolution thermodynamique du système est réversible ?

On s'intéresse maintenant au cas d'une machine ditherme. On note  $Q_1$  et  $Q_2$  les chaleurs reçues algébriquement par le système durant le cycle complet en provenance respectivement des sources thermiques de température  $T_1$  et  $T_2$ . On supposera  $T_1 < T_2$ .

1.4 Montrer que  $Q_2$  peut s'exprimer de deux façons différentes en fonction de  $Q_1$  :

$$Q_2 = \alpha_1 \cdot Q_1 - W$$

$$Q_2 = \alpha_2 \cdot Q_1 + \alpha_3 \cdot S_C$$

où  $\alpha_1$  est une constante,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  deux expressions faisant intervenir  $T_1$  et  $T_2$ .

On se place par la suite dans le cas particulier où  $\alpha_2 = -2$ ,  $\alpha_3 \cdot S_C = -1$  Joule et  $W = -0,5$  Joule.

1.5 Quel est le type de machine thermique considéré ?

1.6 Déterminer les valeurs numériques respectives de  $Q_1$  et  $Q_2$ . Interpréter les signes de  $Q_1$  et  $Q_2$ .

1.7 Définir et calculer numériquement le rendement  $\eta$  de ce type de machine.

1.8 Déterminer l'expression de  $\eta$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $Q_2$  et  $S_C$ . Interpréter l'expression de  $\eta$  lorsque l'évolution du système est réversible.

## 2 Moteur à explosion

Le moteur à explosion fonctionne sur le principe du cycle illustré par le diagramme de Clapeyron (P,V) de la figure 1. Ce cycle peut se décomposer en quatre transformations thermodynamiques consécutives subies par un mélange air-carburant initialement admis dans une chambre de combustion via une soupape d'admission :

- une compression isentropique (adiabatique réversible) du mélange (portion 1→2),
- une explosion du mélange à volume constant (portion 2→3),
- une détente isentropique du mélange (portion 3→4),
- une chute de pression du mélange à volume constant due à l'ouverture d'une soupape d'échappement (portion 4→1).

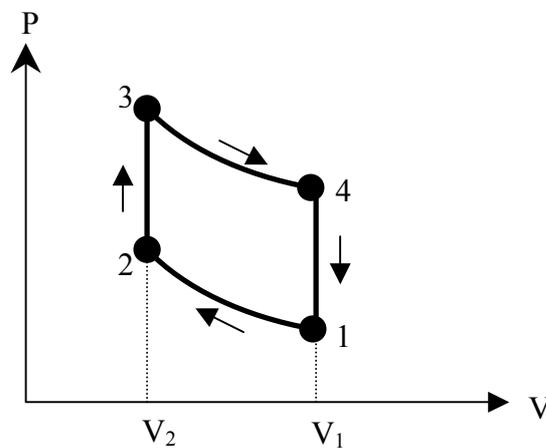


Figure 1

On note :

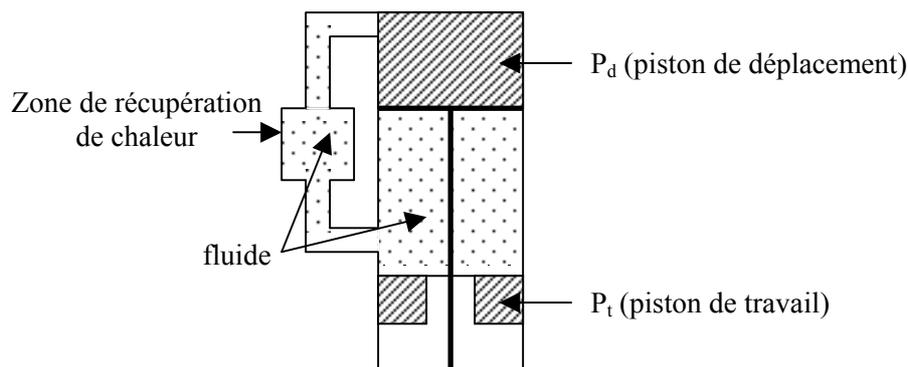
- $P_i$ ,  $V_i$  et  $T_i$ , respectivement la pression, le volume et la température du mélange aux points  $i$  variant de 1 à 4 de la figure 1 (en remarquant que  $V_3 = V_2$  et  $V_4 = V_1$ ),
- $Q_{23}$ , la chaleur algébrique reçue par le mélange lors de l'explosion (2→3),
- $Q_{41}$ , la chaleur algébrique reçue par le mélange lors de la chute de pression (4→1),
- $W$ , le travail algébrique reçu par le mélange lors du cycle complet,
- $C_v$  et  $C_p$ , respectivement les capacités calorifiques molaires isochore et isobare du mélange,
- $\eta_m$ , le rendement du moteur,
- $\gamma = C_p/C_v$ .

On considèrera le mélange air-carburant comme un système thermodynamique fermé assimilable à une mole de gaz parfait.

- 2.1 Déterminer les expressions de  $\Delta U_{23}$  et  $\Delta U_{41}$ , variations de l'énergie interne du mélange sur les portions respectives 2→3 et 4→1 du cycle.
- 2.2 En déduire les expressions de  $Q_{23}$  et  $Q_{41}$ . Déterminer et interpréter les signes de  $Q_{23}$  et  $Q_{41}$ .
- 2.3 Exprimer  $\eta_m$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ .
- 2.4 Déterminer les expressions des rapports  $T_2/T_1$  et  $T_3/T_4$  en fonction de  $K = V_1/V_2$  et  $\gamma$ .
- 2.5 En déduire l'expression de  $\eta_m$  en fonction de  $K$  et  $\gamma$ .
- 2.6 Application numérique :  $\gamma = 1,5$  et  $K = 9$ . Calculer la valeur numérique de  $\eta_m$ .

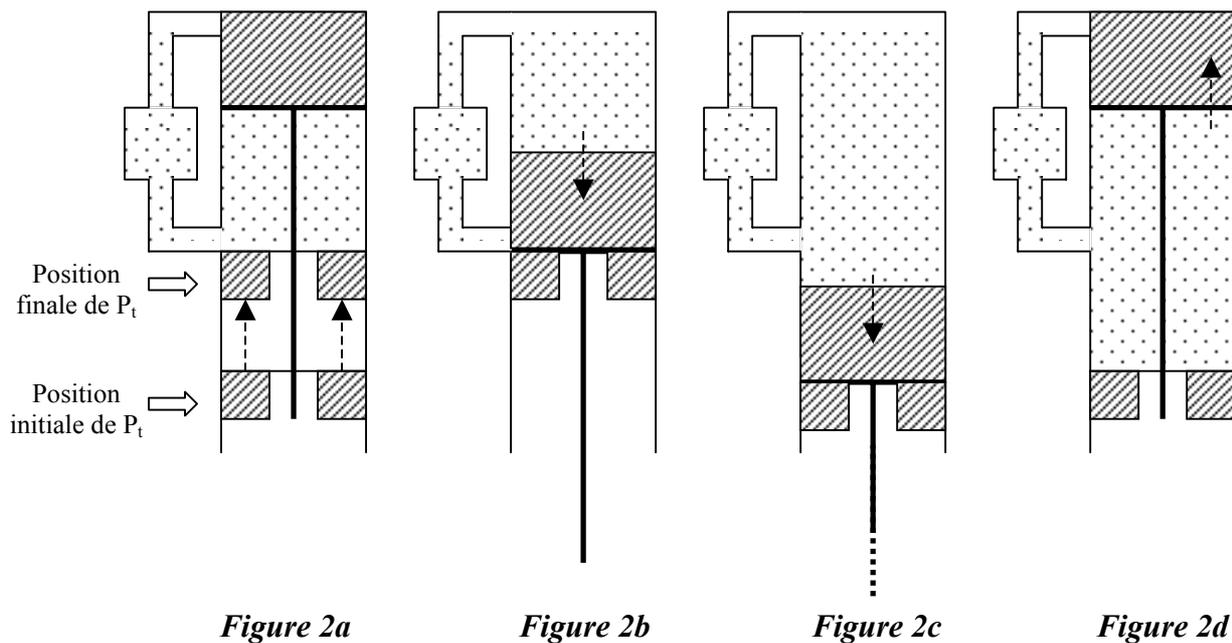
### 3 Moteur de Stirling

On considère un fluide enfermé dans une enceinte close comportant deux pistons, un piston de déplacement  $P_d$  et un piston de travail  $P_t$ . Cette enceinte est constituée d'un cylindre creux ainsi que d'une zone de récupération de chaleur (cf. figure ci-dessous).



Le moteur de Stirling repose sur le cycle comportant les 4 étapes représentées sur les figures 2a à 2d décrites ci-dessous :

- Compression isotherme (figure 2a) : le fluide est comprimé de façon isotherme par le piston  $P_t$  à la température  $T_1$ . On note  $V_1$  le volume initial du fluide et  $V_2$  son volume final.
- Chauffage à volume constant (figure 2b) : le piston  $P_d$  descend et impose au fluide de traverser la zone de récupération de chaleur qui chauffe le fluide à volume constant. On note  $Q_2$  la chaleur algébrique reçue par le fluide lors de cette étape.
- Détente isotherme (figure 2c) : les deux pistons descendent ensemble ce qui permet au fluide de se détendre de façon isotherme à la température  $T_2$  jusqu'au volume  $V_1$ . On note respectivement  $W_3$  et  $Q_3$  le travail et la chaleur algébrique reçue par le fluide durant cette étape.
- Refroidissement à volume constant (figure 2d) : le piston  $P_d$  remonte seul et le fluide traverse de nouveau la zone de récupération en lui cédant de la chaleur. On note  $Q_4$  la chaleur algébrique reçue par le fluide lors de cette étape.



On assimilera le fluide à un gaz parfait. On note  $R$  la constante des gaz parfait et  $n$  le nombre de moles du fluide.

On supposera que la chaleur récupérée par la zone de récupération lors de l'étape de refroidissement du fluide est égale à celle fournie au fluide lors de l'étape de chauffage.

- 3.1 En déduire la relation entre  $Q_2$  et  $Q_4$ .
- 3.2 Déterminer l'expression de  $W_3$  en fonction des données du problèmes. Déterminer et interpréter le signe de  $W_3$ .
- 3.3 Déterminer l'expression de  $Q_3$ .
- 3.4 Déterminer l'expression algébrique de  $W$ , travail reçu par le système lors d'un cycle complet.
- 3.5 En déduire le rendement  $\eta_m$  de ce moteur. Commenter ce résultat.

## DEUXIEME PROBLEME

### MECANIQUE

#### 4 Mouvement d'un anneau sur une piste circulaire

On considère le dispositif de la figure 3, où un anneau assimilable à un point matériel  $M$  de masse  $m$  se déplace solidairement à une piste fixe formée de deux parties circulaires (1) et (2) de rayon  $R_1$  et  $R_2$ , de centre  $C_1$  et  $C_2$ , dans un plan vertical. On supposera  $R_2 > R_1$ .

On repère la position de l'anneau par un angle  $\theta$  pris à partir de  $C_1$  pour son mouvement sur la partie (1), et à partir de  $C_2$  pour son mouvement sur la partie (2).

Sur la partie (1),  $\theta$  est varié entre  $-\pi/2$  et  $\pi$ . Sur la partie (2),  $\theta$  varie entre  $\pi$  et  $5\pi/2$ .

On note  $g$  la constante de gravitation terrestre.

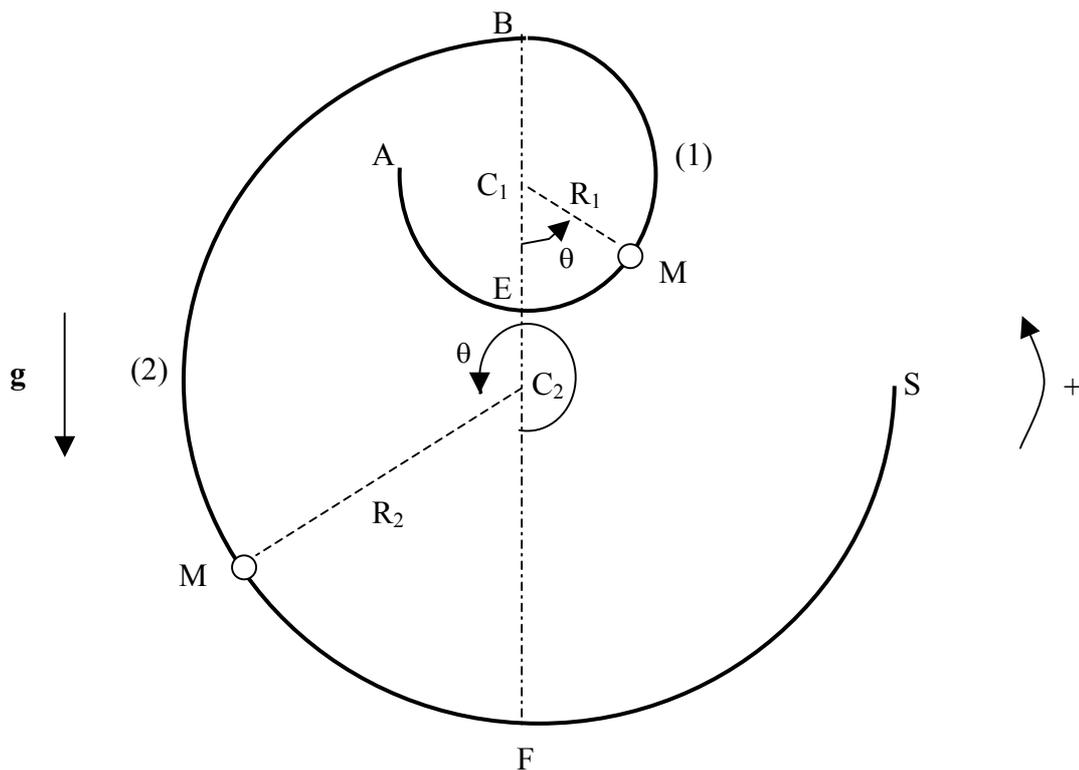


Figure 3

Dans tout le problème, on suppose le mouvement de l'anneau s'effectue sans frottements.

On suppose dans un premier temps que le mouvement de l'anneau s'effectue sur la partie (1) du dispositif.

A l'instant  $t = 0$ , l'anneau est au point E ( $\theta = 0$ ) avec une vitesse angulaire initiale positive  $(d\theta/dt)_0$ .

4.1 Exprimer  $(d\theta/dt)^2$  à un instant quelconque en fonction des données du problème.

On émet pour les deux questions qui suivent l'hypothèse que  $\theta$  est suffisamment petit pour assimiler  $\sin\theta$  à  $\theta$ .

4.2 Déterminer l'expression de  $\theta(t)$ .  
Exprimer la valeur maximale de  $\theta(t)$ ,  $\theta_{\max}$ .

4.3 Application numérique :  $R_1 = 1 \text{ mm}$ ,  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $(d\theta/dt)_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . Calculer la pulsation  $\omega$ , la période  $T$  et l'amplitude maximale  $\theta_{\max}$  du mouvement.  
L'approximation  $\sin\theta = \theta$  est elle valable ?

## 5 Mouvement de l'anneau sur la piste complète

5.1 Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur,  $E_p$ , de l'anneau  $M$  en supposant  $E_p = 0$  au point B ( $\theta = \pi$ ). On distinguera les cas  $-\pi/2 < \theta < \pi$  et  $\pi < \theta < 2\pi$ .

5.2 Tracer l'allure de  $E_p(\theta)$ .

5.3 Déterminer les positions angulaires d'équilibre de l'anneau, en précisant leur stabilité.

L'anneau étant initialement en A ( $\theta = -\pi/2$ ), il est lancé à une vitesse  $V_0$  sur le support fixe.

5.4 A quelle condition sur la vitesse  $V_0$  l'anneau peut-il atteindre le point F ?

5.5 Cette condition étant remplie, donner l'expression de sa vitesse  $V_F$  en F ( $\theta = 2\pi$ ), en fonction des données du problème.

5.6 A quelle condition sur  $V_0$ , l'anneau sort-il de la piste en S ( $\theta = 5\pi/2$ ) ?

## TROISIEME PROBLEME

### ELECTROMAGNETISME

#### 6 Particule dans des champs électriques et magnétiques, dans le vide

On considère une particule ponctuelle, de charge  $q$  et de masse  $m$ , de vitesse initiale  $V_0$  à l'entrée d'une zone où règnent un champ électrique  $\mathbf{E}$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

On suppose ces champs uniformes et indépendants du temps, et on néglige toute autre force que celles provoquées par ces champs.

- 6.1 La particule décrit une droite, et possède une accélération constante  $\gamma$ . Déterminer la direction et le module des champs qui provoquent cette trajectoire.
- 6.2 La particule décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R_0$ , dans un plan. Déterminer la direction et le module des champs qui provoquent cette trajectoire.
- 6.3 La particule considérée décrit une trajectoire rectiligne et plane à vitesse constante  $V_0$ . D'autres particules de vitesses initiales différentes décrivent des trajectoires incurvées. Représenter sur un schéma les directions du champ  $\mathbf{E}$  et du champ  $\mathbf{B}$  qui provoquent ces trajectoires, et déterminer la relation existant entre  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $V_0$ .
- 6.4 Décrire deux appareils utilisés en physique ou en chimie utilisant le mouvement de particules chargées dans des champs électriques ou magnétiques.

#### 7 Courants créés par des champs électriques et magnétiques

On considère un matériau conducteur comportant, par unité de volume,  $N$  ions positifs immobiles et  $N$  électrons libres, de charge  $q = -e$ ,  $e$  étant la charge élémentaire.

On suppose que les  $N$  électrons ont à chaque instant la même vitesse  $\mathbf{V}(t)$ .

- 7.1 Donner la définition de la densité de courant  $\mathbf{J}$  dans le cas général.  
Donner son expression dans ce matériau en fonction des données du problème.

On suppose que dans ce matériau les électrons en mouvement sont soumis à deux forces :

- la force de Coulomb engendrée par un champ électrostatique  $\mathbf{E}$  créé par un générateur extérieur,
- une force  $-\lambda\mathbf{V}$  provenant des interactions entre les électrons et les ions fixes.

- 7.2 Etablir une équation différentielle liant  $\mathbf{V}(t)$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $m$  et  $e$ .

- 7.3 Dans ces conditions, lorsque le régime permanent est atteint, démontrer que le matériau vérifie la loi d'Ohm locale et en déduire l'expression de sa conductivité  $\sigma$  en fonction de  $N$ ,  $e$  et  $\lambda$ .

On suppose désormais que les électrons sont soumis en plus à l'action d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , uniforme et indépendant du temps.

- 7.4 Etablir en régime permanent la relation reliant  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  et en déduire que la loi d'Ohm locale n'est plus vérifiée par le matériau.

On considère deux cylindres, coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , d'axe  $Oz$ , de hauteur commune  $H$ , parfaitement conducteurs (cf. figure 4). Le matériau précédent emplit l'espace entre les deux cylindres. La face intérieure du dispositif est portée au potentiel  $V_1$ . La face extérieure du dispositif est portée au potentiel  $V_2$ . En régime permanent, un courant  $I$  circule entre ces deux faces, par l'intermédiaire d'un fil relié à un générateur extérieur.

Ce dispositif est plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  uniforme et indépendant du temps, dirigé suivant ( $Oz$ ).

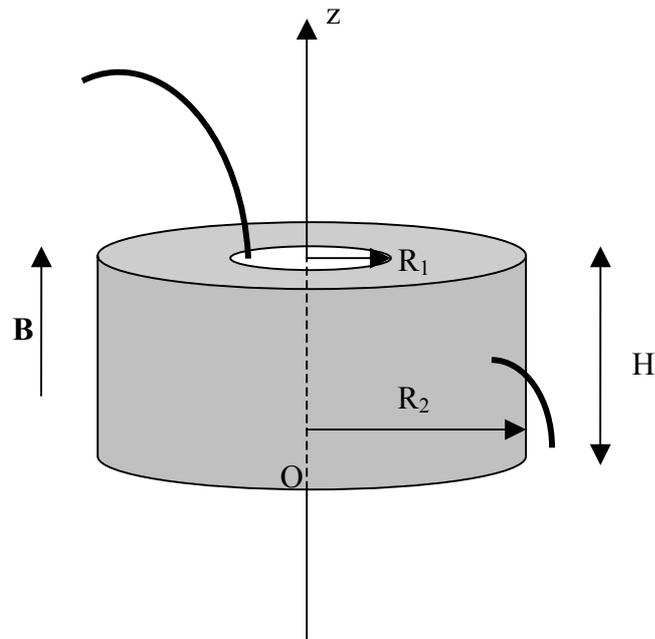


Figure 4

- 7.5 Déterminer la direction, le sens et le module du champ  $\mathbf{E}$  en un point  $P$  quelconque du matériau. Donner l'allure des lignes de champ électrique dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  et en supposant  $V_1 > V_2$ .
- 7.6 Donner l'allure des lignes de courant, dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  et en supposant  $V_1 > V_2$ .
- 7.7 A partir de la relation trouvée à la question 7.4, déterminer en coordonnées cylindriques les composantes  $(J_r, J_\theta)$  du vecteur  $\mathbf{J}$  en un point quelconque du matériau. On exprimera  $\mathbf{J}$  en fonction de la conductivité  $\sigma$  calculée à la question 7.3.
- 7.8 En calculant le flux de  $\mathbf{J}$  à travers la surface latérale d'un cylindre quelconque situé entre les cylindres limitant le matériau, exprimer la valeur de la résistance  $R$  du dispositif.

\*\*\*\*\* Fin de l'épreuve \*\*\*\*\*