

**BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS  
-SESSION 2014-**

**ÉPREUVE DE MÉCANIQUE**

**CODE ÉPREUVE : 970**

**CALCULATRICE INTERDITE**

**DURÉE DE L'ÉPREUVE: 2H30**

## Exercice 1

On s'intéresse à la poutre de longueur  $L$  et de section constante  $S$  modélisée sur la **Figure 1**. Celle-ci est encastree à son extrémité  $O$  et soumise à une densité linéique d'effort  $\vec{p} = -p \vec{y}$  sur toute sa longueur et à un glisseur  $\vec{R} = R\vec{y}$  en  $A$ . Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope, de module d'Young  $E$ . On se place dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli. Classiquement, dans le cadre de la théorie des poutres, on prendra comme convention que le torseur de cohésion à l'abscisse  $x$  représente les actions mécaniques intérieures exercées par la partie avale ( $> x$ ) sur la partie amont ( $< x$ ).

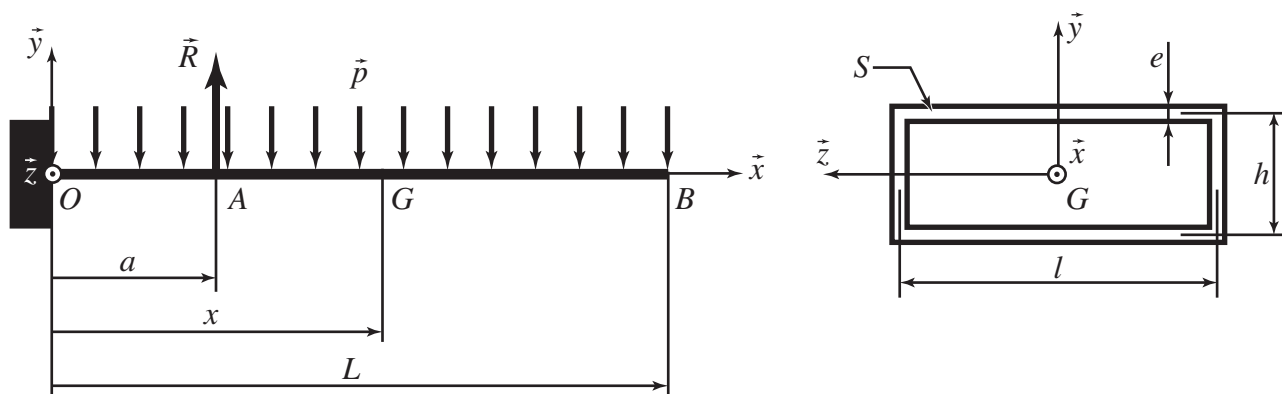


Figure 1 – Poutre console

(A) La résultante des actions mécaniques exercées par le bâti sur la poutre en  $O$  est :

$$\vec{R}_O = -(pL - R)\vec{y}$$

(B) Le moment des actions mécaniques exercées par le bâti sur la poutre en  $O$  est :

$$\vec{M}_O = (p\frac{L^2}{2} - aR)\vec{z}$$

(C) Si la poutre est en équilibre, le moment des actions mécaniques exercées par le bâti sur la poutre en  $O$  est nul.

(D) Le moment fléchissant selon  $\vec{z}$  dans la poutre pour  $0 < x < L$  est :

$$M(x) = -\frac{1}{2}p(L-x)^2$$

qui ne dépend pas de  $R$  puisque  $\vec{R}$  est un glisseur exercé de manière locale sur la poutre, ce qui n'affecte que la partie résultante du torseur de cohésion.

(E) L'effort tranchant selon  $\vec{y}$  dans la poutre pour  $a < x < L$  peut s'obtenir par la relation :

$$T(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$$

## Exercice 2

On reprend l'exercice précédant et on s'intéresse maintenant aux déformations dues aux charge-ments extérieurs  $\vec{p}$  et  $\vec{R}$ .

- (A) Si l'épaisseur  $e$  de la section est petite devant les dimensions  $h$  et  $l$ , un développement limité au premier ordre conduit à une valeur du moment quadratique de la section  $S$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$  :

$$I = \frac{elh^3}{6} \left( \frac{1}{l} + \frac{3}{h} \right)$$

- (B) Si on suppose dans un premier temps que  $R = 0$ , le déplacement dû à  $p$  du centre de la section à l'extrémité  $B$  est :

$$\vec{v}_p(L) = -\frac{pL^4}{8EI} \vec{y}$$

- (C) Si on suppose maintenant que  $p = 0$ , le déplacement dû à  $R$  du centre de la section à l'extrémité  $B$  est :

$$\vec{v}_R(L) = \frac{RL^3}{3EI} \vec{y}$$

- (D) Indépendamment des réponses aux items précédents, pour déterminer la flèche totale due à  $p$  et  $R$ , il suffit d'ajouter les deux résultats précédents :

$$\vec{v}(L) = \vec{v}_p(L) + \vec{v}_R(L)$$

- (E) Indépendamment des réponses aux items précédents, pour déterminer la flèche totale due à  $p$  et  $R$ , il aurait suffi d'ajouter les deux résultats précédents :

$$\vec{v}(L) = \vec{v}_p(L) + \vec{v}_R(L)$$

seulement si le glisseur  $\vec{R}$  avait été appliqué à l'extrémité de la poutre, ce qui n'est pas le cas sur la **Figure 1**.

## Exercice 3

On se propose d'étudier le montage de roulements de la **Figure 2**.

- (A) Les deux roulements à billes à contact oblique sont montés de façon à conférer une grande souplesse à la liaison et permettent d'encaisser une charge axiale importante.
- (B) La durée de vie de tels roulements peut être calculée en utilisant la formule  $L = (C/P)^\alpha$  où  $L$  est la durée de vie nominale (en millions de tours),  $C$  la charge dynamique de base (en kN),  $P$  la charge dynamique radiale équivalente (en kN) et  $\alpha = 10/3$  puisque le contact est oblique.
- (C) Un jeu axial entre les deux bagues intérieures des roulements à billes à contact oblique permet une précharge du montage, réalisée par un écrou à encoches.
- (D) Une précharge dans un montage de roulements à contact oblique est un moyen d'augmenter la durée de vie du montage.
- (E) La bague extérieure du roulement à billes à contact radial est montée serrée dans l'alésage.

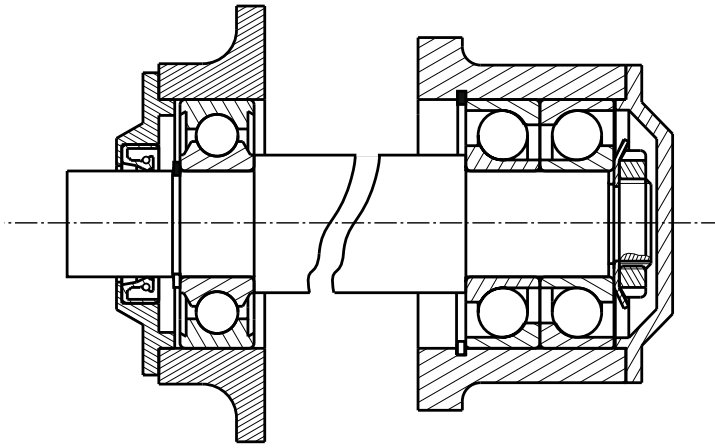


Figure 2 – Montage de roulements

### Exercice 4

- (A) Le laiton est un alliage de cuivre et de zinc.
- (B) La trempe d'un acier permet d'augmenter sa limite élastique.
- (C) En général, le coefficient de frottement dynamique (ou de glissement) est inférieur au coefficient de frottement statique (ou d'adhérence).
- (D) Le coefficient de frottement statique, à sec, entre deux surfaces en acier est compris entre 0,01 et 0,03.
- (E) L'acier désigné par 35NiCrMo16 (35NCD16) est fortement allié.

### Exercice 5

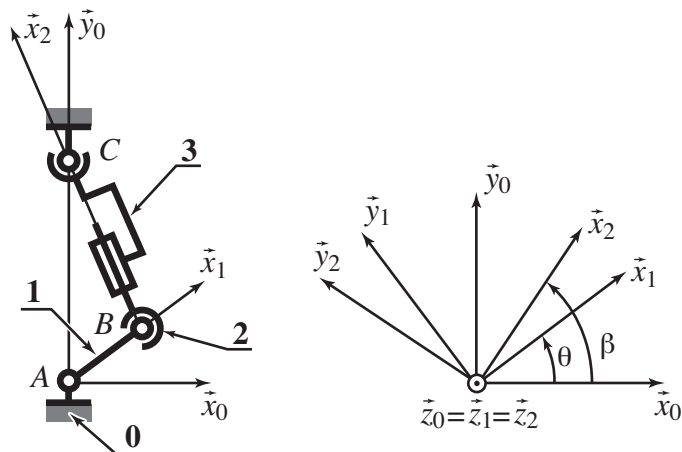


Figure 3 – Moteur à pistons radiaux Bosch Rexroth

On s'intéresse dans cet exercice au moteur hydraulique à 5 pistons radiaux Bosch Rexroth. En ne considérant qu'un seul des 5 pistons, celui-ci est modélisé par le système de la **Figure 3**, constitué de 3 pièces **1**, **2** et **3** en mouvement par rapport à un bâti **0**. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- Le bâti **0** est muni du repère  $\mathcal{R}_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- Le vilebrequin **1** est lié au corps **0** par une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$  et on note  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- La demi-bielle **2** est liée au vilebrequin **1** par une liaison rotule de centre  $B$  telle que  $\overrightarrow{AB} = \ell \vec{x}_1$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$  et on note  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .
- La demi-bielle **3** est liée à la demi-bielle **2** par une liaison pivot-glissant d'axe  $(B, \vec{x}_2)$ . On note  $\overrightarrow{BC} = x \vec{x}_2$  où  $x$  est une longueur qui varie au cours du mouvement.
- Enfin, la demi-bielle **3** est liée au bâti **0** par une liaison rotule de centre  $C$  telle que  $\overrightarrow{AC} = H \vec{y}_0$ .

- (A) Le degré de mobilité utile du mécanisme, tel qu'il est modélisé sur la **Figure 3** et considéré en 3D, est égal à 2.
- (B) Le degré de mobilité interne du mécanisme, tel qu'il est modélisé sur la **Figure 3** et considéré en 3D, est égal à 2.
- (C) Le mécanisme, tel qu'il est modélisé sur la **Figure 3** et considéré en 3D, est isostatique.
- (D) L'accélération du point  $B$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est :

$$\vec{\Gamma}(B/\mathcal{R}_0) = \ell(\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + \ddot{\theta} \vec{y}_1)$$

- (E) L'accélération du point  $B$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$  est :

$$\vec{\Gamma}(B/\mathcal{R}_1) = \ell(-\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + \ddot{\theta} \vec{y}_1)$$

## Exercice 6

On reprend le moteur hydraulique de l'exercice précédent et on s'intéresse maintenant à la loi entrée-sortie liant la vitesse de translation  $\dot{x}$  à la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$ .

- (A) La fermeture géométrique  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ , projetée sur les axes  $\vec{x}_2$  et  $\vec{y}_2$ , conduit à :

$$\begin{aligned} x + \ell \cos(\beta - \theta) + H \sin \beta &= 0 \\ \ell \sin(\beta - \theta) + H \cos \beta &= 0 \end{aligned}$$

- (B) La vitesse de translation peut s'écrire :

$$\dot{x} = H \dot{\theta} \cos \beta$$

- (C) L'angle  $\beta$  est lié à l'angle  $\theta$  par la relation :

$$\tan \beta \cos \theta = \frac{H}{\ell} + \sin \theta$$

- (D) Si on fait l'hypothèse que  $\ell$  est très petit devant  $H$  (c'est-à-dire que  $\ell/H \ll 1$ ), on montre au premier ordre que :

$$\dot{x} \approx -\ell \dot{\theta} \cos \theta$$

- (E) Le vecteur vitesse de rotation de la pièce **2** par rapport à la pièce **1** est :

$$\vec{\Omega}(2/1) = (\dot{\theta} - \dot{\beta}) \vec{z}_0$$

## Exercice 7

Un solide **1** de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti **0** (**Figure 4**). Le bâti est fixe dans un référentiel galiléen. On lui attache le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . La liaison pivot est supposée parfaite. Le repère  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié à **1** est choisi tel que le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  contienne le centre de gravité  $G$ . On note  $\theta$  l'angle  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

Pour un solide **1** quelconque, le centre de gravité  $G$  n'est pas *a priori* sur l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et est tel que  $\vec{OG} = a\vec{x}_1$ . La matrice d'inertie du solide **1** au point  $O$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est de la forme générale :

$$\mathbf{I}(O, \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Le torseur des actions mécaniques transmissibles dans la liaison pivot entre **1** et **0** est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{(\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1})}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_0 & L_0 \\ Y_0 & M_0 \\ Z_0 & 0 \end{array} \right\}_{(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

On suppose qu'aucune autre action mécanique ne s'applique sur le solide **1** hormis un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$ .

- (A) Le solide **1** en rotation par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  est dit équilibré dynamiquement si son centre de gravité  $G$  est sur l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ .
- (B) La composante d'effort de liaison suivant  $\vec{y}_0$  est :

$$Y_0 = ma(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

- (C) Le moment dynamique au point  $O$  du solide **1** par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est :

$$\vec{\delta}(0, \mathbf{1}/\mathbf{0}) = (-E\ddot{\theta} + D\dot{\theta}^2)\vec{x}_1 - (D\ddot{\theta} + E\dot{\theta}^2)\vec{y}_1 + C\ddot{\theta}\vec{z}_0$$

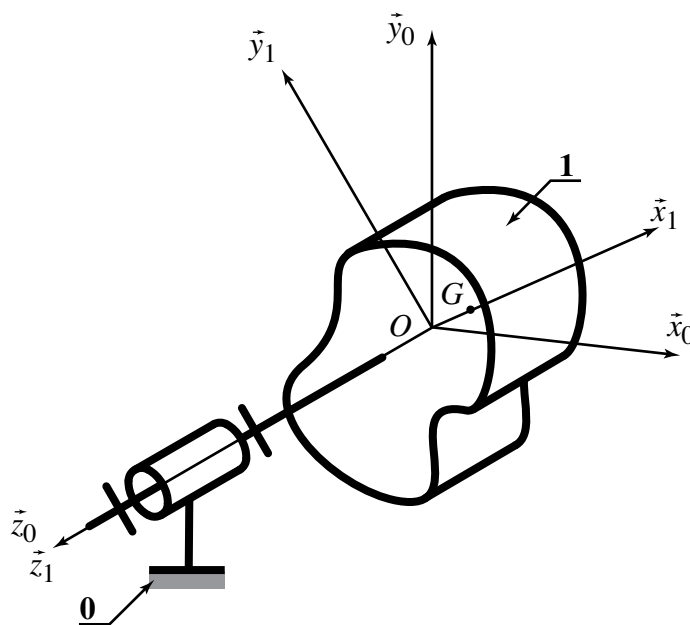


Figure 4 – Solide en rotation autour d'un axe fixe

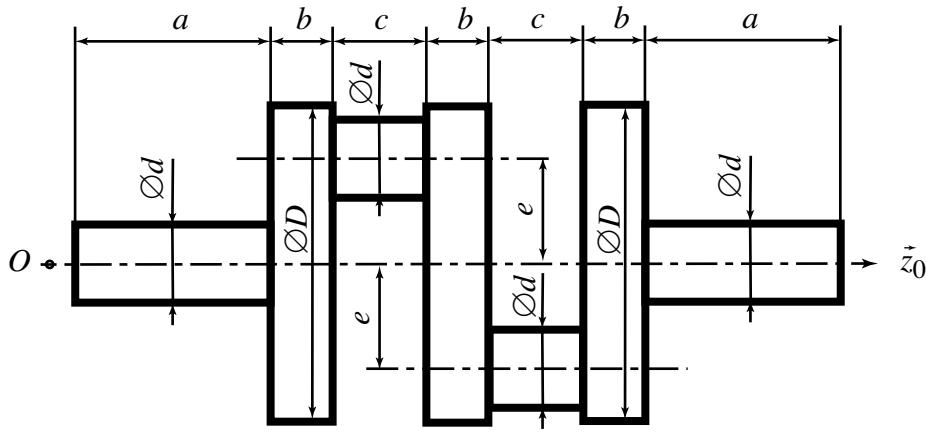


Figure 5 – Vilebrequin

- (D) Dans le cas où le solide **1** est le vilebrequin idéalisé de la **Figure 5**, le solide **1** en rotation par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  n'est pas équilibré statiquement.
- (E) Dans le cas où le solide **1** est le vilebrequin idéalisé de la **Figure 5** et en notant  $\rho$  sa masse volumique, on a :

$$C = \frac{\rho\pi}{16} \left( ad^4 + \frac{3}{2}bD^4 + cd^4 \right)$$

## Exercice 8

On s'intéresse à l'équilibre statique du système de la **Figure 6**. On pose :

- $\vec{AB} = L\vec{x}_1$  et  $\vec{BC} = d\vec{x}_2$
- $a$  et  $b$  sont tels que  $\vec{AD} = a\vec{x}_0 - b\vec{y}_0$
- $c$  et  $e$  sont tels que  $\vec{DC} = c\vec{x}_3$  et  $\vec{DE} = e\vec{x}_3$

Un couple moteur  $C_m > 0$  est appliqué en  $A$  sur la pièce **1**. Toutes les liaisons entre les pièces sont des liaisons pivot supposées parfaites. On fera l'hypothèse d'un problème plan. Le torseur des actions mécaniques transmissibles dans la liaison pivot entre **1** et le bâti **0** est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_A & - \\ Y_A & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

- (A) L'effort résultant de **2** sur **1**,  $\vec{F}(2 \rightarrow 1)$  est tel que sa norme,  $F_{2-1}$  est :

$$\|\vec{F}(2 \rightarrow 1)\| = F_{2-1} = \frac{C_m}{L}$$

- (B) La norme de  $\vec{F}$  est reliée au couple moteur  $C_m$  par la relation (au signe près) :

$$F = C_m \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_2} \frac{c}{Le}$$

- (C) Les actions de liaison dans la liaison pivot entre **1** et le bâti **0** sont telles que :

$$\begin{cases} X_A = F_{2-1} \cos \theta_2 \\ Y_A = F_{2-1} \sin \theta_2 \end{cases}$$

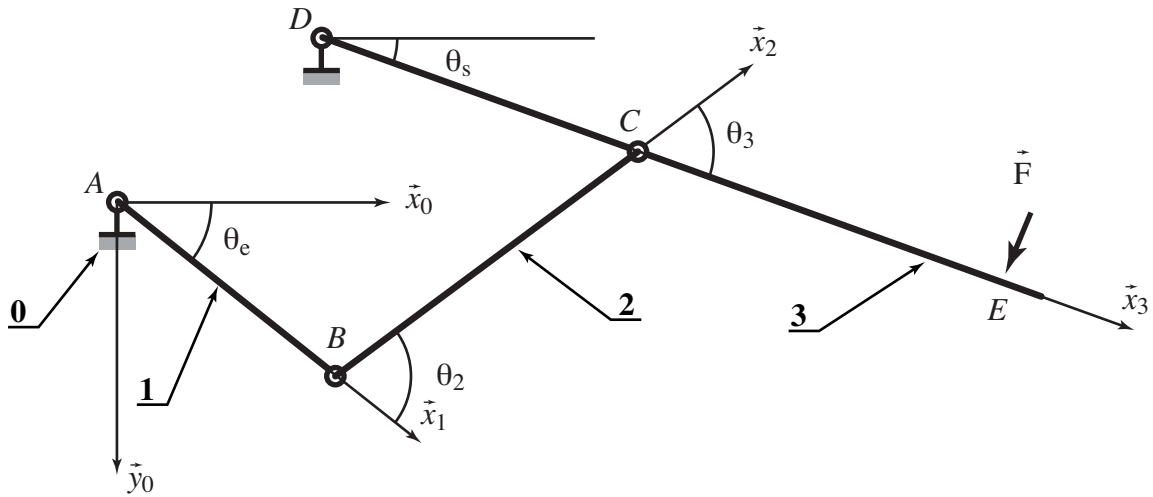


Figure 6 – Ventail d'un portail soumis à un effort  $\vec{F}$

- (D) Dans cette question, le problème n'est plus plan. On se place dans le cas d'un mécanisme dans l'espace tridimensionnel  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Les liaisons sont des liaisons pivot. En 3D, le degré d'hyperstatisme est de 2.
- (E) Comme dans la question précédente, le problème n'est plus plan. Les liaisons sont toutes des liaisons pivot sauf la liaison entre les pièces 1 et 2 qui est remplacée par une liaison rotule. En 3D, le système est alors isostatique.

## Exercice 9

On s'intéresse à la poutre en forme de T de la **Figure 7**. Sa section est circulaire de diamètre  $D$ . On pose :  $\vec{OA} = L\vec{x}$  et  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = a$ . Elle est soumise à deux efforts  $\vec{F}_B = F_B\vec{y}$  et  $\vec{F}_C = -F_C\vec{y}$  où  $F_B$  et  $F_C$  sont positifs.

- (A) Le torseur de cohésion en un point courant  $M$  de la poutre tel que  $\vec{OM} = x\vec{x}$  est :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & -(F_B + F_C)a \\ F_B - F_C & 0 \\ 0 & (F_B - F_C)(L - x) \end{array} \right\}_{(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- (B) La poutre est sollicitée en torsion pure.
- (C) On se place dans le cas où  $F_B = F_C = F$ . Dans ce cas, la contrainte de cisaillement maximale vaut :

$$\tau = \frac{64Fa}{\pi D^4}$$

- (D) Comme dans la question précédente, on suppose que  $F_B = F_C = F$ . Si le critère de dimensionnement est la limite d'élasticité, multiplier le diamètre  $D$  par un coefficient  $\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) permet de multiplier l'effort maximal admissible que peut supporter la poutre par un coefficient  $\alpha^3$ .
- (E) Si on réalise la poutre par un arbre creux de section circulaire, de diamètre intérieur  $d$ , et de diamètre extérieur  $D$ , alors le moment quadratique polaire en un point de la fibre neutre de la section est :

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$



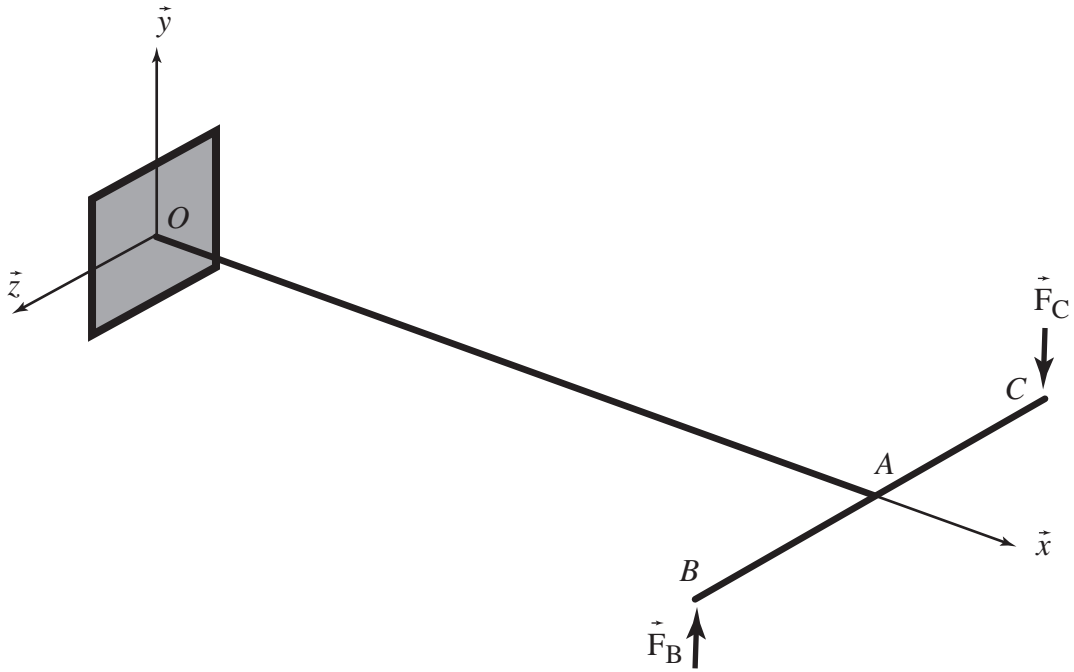


Figure 7 – Poutre en T

## Exercice 10

- (A) Un joint à lèvres standard permet d'assurer une étanchéité pour une pression pouvant aller jusqu'à 100 MPa.
- (B) La longueur d'implantation d'une vis dans un matériau en alliage d'aluminium peut-être égale à son diamètre.
- (C) Le pas d'une vis à  $n$  filets est égale à  $n$  fois le pas du profil du filetage.
- (D) La pression spécifique  $p_{sep}$  d'un coussinet standard de diamètre  $d$  et de longueur  $L$  soumis à une charge radiale de  $F$  se détermine par :

$$p_{spe} = \frac{F}{\pi d L}$$

- (E) Une roue-libre peut supporter des efforts radiaux. Il n'y a pas nécessité de l'associer à un roulement, par exemple, pour fonctionner correctement.

## Exercice 11

On s'intéresse au train épicycloïdal de la **Figure 8** comportant trois satellites identiques équirépartis angulairement  $2$ ,  $2'$  et  $2''$ . On suppose ici que la couronne 3 est fixe par rapport au bâti  $0$ . On note  $\mathcal{R}_0$  le référentiel du bâti supposé galiléen. Toutes les liaisons (pivots et engrènements) sont supposées parfaites. Le champ de gravité est dirigé suivant  $-\vec{y}$  :  $\vec{g} = -g\vec{y}$ . On isole le système  $\Sigma = \{1, 2, 2', 2'', 4\}$ . On notera  $\omega_i = \omega(i/0)$  la vitesse de rotation du solide  $i$  par rapport au bâti.

On note  $I_i$  l'inertie du solide  $i$  en son centre de gravité  $G_i$  suivant l'axe  $\vec{x}$  et  $m_i$  sa masse. De même, on notera  $C_i$ , le couple des éléments extérieurs à  $\Sigma$  sur le solide  $i$  suivant l'axe général du système  $\vec{x}$  et en un point de cet axe.

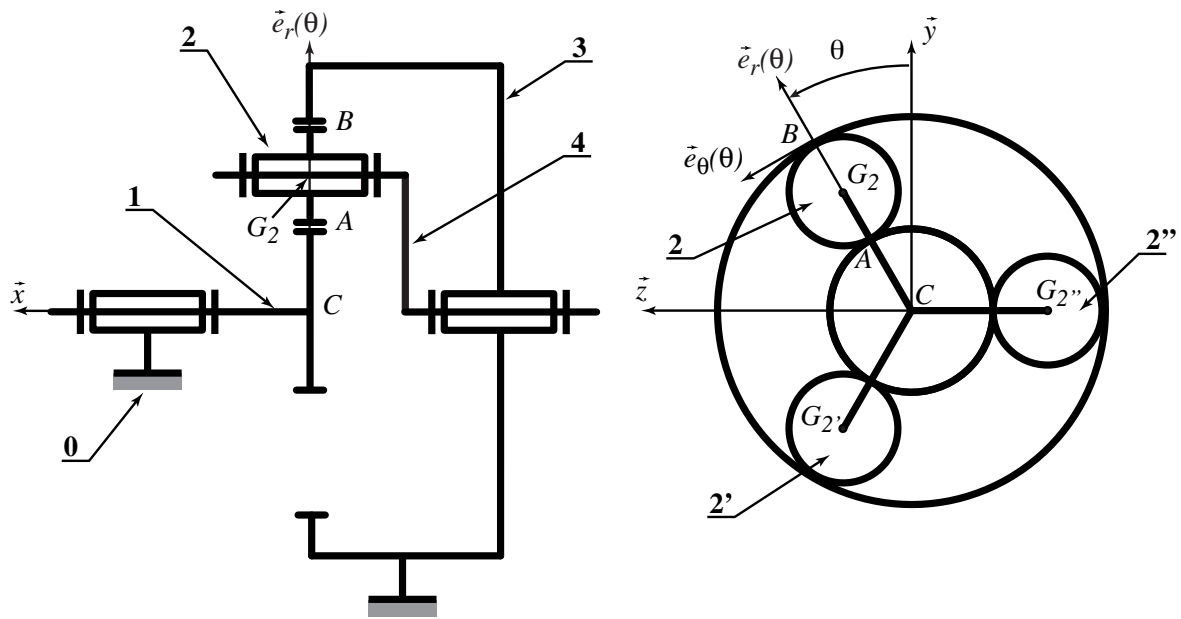


Figure 8 – Train planétaire à trois satellites

- (A) En notant  $\lambda = -\frac{R_3}{R_1}$ , on a la relation suivante entre les vitesses de rotation des pièces par rapport au bâti :

$$\omega_1 - \lambda \omega_3 + (1 - \lambda) \omega_4 = 0$$

- (B) En régime permanent, on a la relation suivante entre les couples extérieurs agissant sur les éléments de  $\Sigma$  :

$$C_1 + \frac{1}{1 - \lambda} C_4 = 0$$

- (C) L'énergie cinétique du solide **2** dans son mouvement par rapport au bâti **0** est :

$$T(2/0) = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$$

- (D) La puissance galiléenne des actions de pesanteur sur  $\Sigma$  est nulle :

$$\mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/0) = 0$$

- (E) On note  $T(\Sigma/0) = \frac{1}{2} I_{eq} \omega_1^2$  l'énergie cinétique de  $\Sigma$  par rapport à **0**. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à  $\Sigma$  donne :

$$I_{eq} \frac{d\omega_1}{dt} = C_1 \omega_1 + C_4 \omega_4$$

## Exercice 12

On s'intéresse à un frein de véhicule automobile qui se compose d'un tambour sur lequel se fixe la roue arrière et de deux mâchoires articulées par rapport au véhicule (au système de suspension arrière en fait). Chaque mâchoire exerce un effort presseur sur le tambour lorsque le cylindre de roue

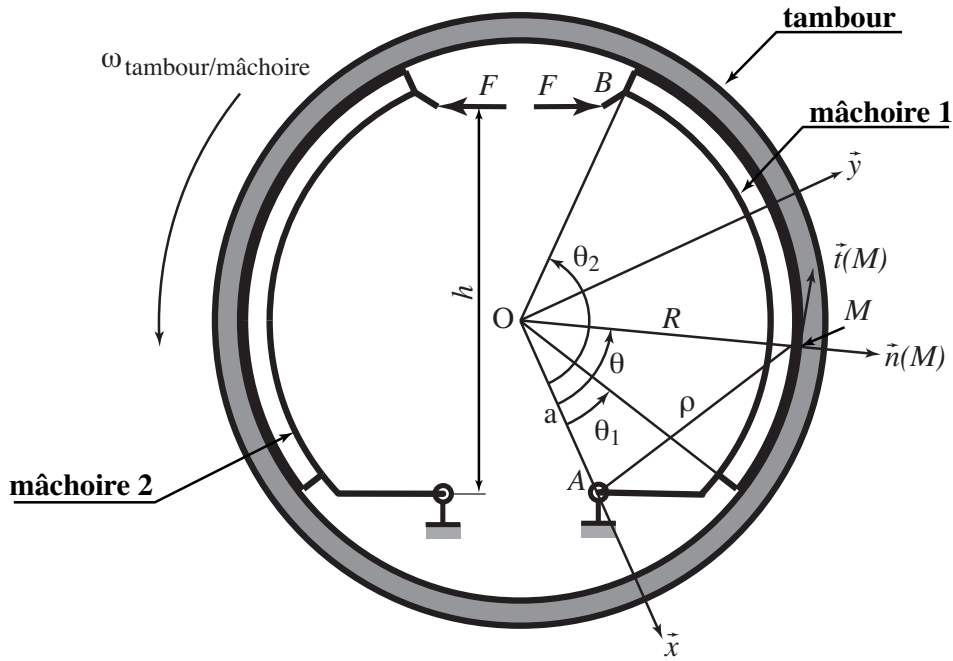


Figure 9 – Paramétrage du frein à tambour

est activé durant une phase de freinage. Le paramétrage du problème est donné en **Figure 9** pour une mâchoire. Les frottements dans les liaisons sont négligés, sauf bien sûr, entre une mâchoire et le tambour. Le coefficient de frottement de glissement entre mâchoire et garniture est noté  $f$ . Les actions de pesanteur sont négligées. Le problème est considéré comme plan.

On supposera que la répartition de pression  $p(\theta)$  entre la mâchoire **1** et le tambour est constante et vaut  $p(\theta) = p_0$ .

(A) Le couple de freinage en  $O$  suivant  $\vec{z}$  exercé par la mâchoire **1** sur le tambour est :

$$C_f = p_0 b R^2 f (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

où  $b$  est la largeur d'une mâchoire suivant  $\vec{z}$ .

(B) La résultante des actions du tambour sur la mâchoire **1** vaut :

$$\vec{R}(\mathbf{1} \rightarrow \text{tambour}) = \int_S p_0 (-\vec{n}(M) + f \vec{t}(M)) dS$$

où  $S$  est la surface de frottement en la mâchoire et le tambour.

(C) Le moment au point  $A$  suivant  $\vec{z}$  des actions du tambour sur la mâchoire **1** vaut :

$$M(A, \mathbf{1} \rightarrow \text{tambour}) = p_0 b R \{a(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + f[a(\sin \theta_2 + \sin \theta_1) - R(\theta_2 - \theta_1)]\}$$

(D) Le coefficient de frottement de glissement pour un couple de matériau acier/acier en contact en milieu lubrifié est de l'ordre de  $f = 0,3$ .

(E) Sur un véhicule de tourisme équipé de freins à disque et de freins à tambour, ces derniers sont montés sur les roues avant.