

**BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS**

**— SESSION 2012 —**

**ÉPREUVE DE MÉCANIQUE**

**CODE ÉPREUVE : 970**

**CALCULATRICE INTERDITE**

**DURÉE : 2H30**

## Exercice 1

Dans cet exercice, on se propose d'étudier le montage de roulements de la **Figure 1**. La charge radiale appliquée sur l'arbre **1** est fixe par rapport au bâti **0**.

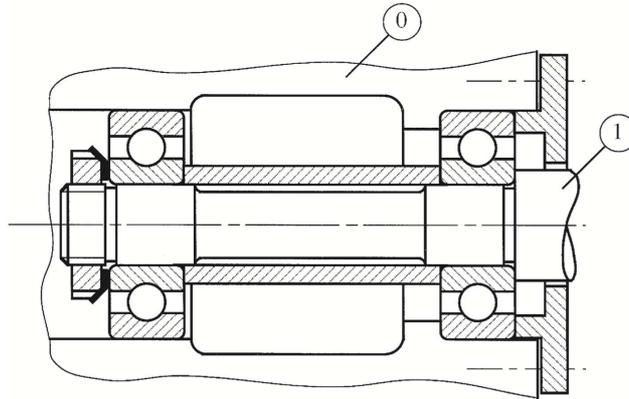


Figure 1 – Montage de roulements.

- (A) Il est nécessaire de monter les bagues extérieures avec un ajustement serré.
- (B) Les bagues fixes par rapport à la direction de la charge radiale ne sont pas obligatoirement arrêtées axialement.
- (C) L'angle de rotulage admissible par un roulement rigide à une rangée de billes a un ordre de grandeur compris entre 2' et 10' (minutes d'angle).
- (D) L'acier 100Cr6 (désignation AFNOR, 1 % de carbone et 1,5 % de chrome) est un bon candidat pour réaliser les pièces servant de chemins de roulement.
- (E) L'écrou permet de régler la précharge dans le montage.

## Exercice 2

- (A) L'ordre de grandeur de la limite élastique d'un acier usuel est de 200 à 400 GPa.
- (B) L'ordre de grandeur du module d'Young d'un acier usuel est de 200 GPa.
- (C) On peut améliorer la résilience d'un acier trempé par un revenu.
- (D) La densité du cuivre est inférieure à celle de l'acier.
- (E) Une fonte est un alliage de fer et de carbone qui contient au moins 5 % de carbone.

## Exercice 3

On s'intéresse à la poutre de longueur  $L$  et de section constante  $S$  modélisée sur la **Figure 2**. Celle-ci est en appui simple à ses extrémités  $A$  et  $B$  et soumise à une densité linéique d'effort  $\vec{q} = -q \vec{y}$ . Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope, de module d'Young  $E$ . On se place dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli. Classiquement, dans le cadre de la théorie des poutres, on prendra comme convention que le torseur de cohésion à l'abscisse  $x$  représente les actions mécaniques intérieures exercées par la partie aval ( $> x$ ) sur la partie amont ( $< x$ ).

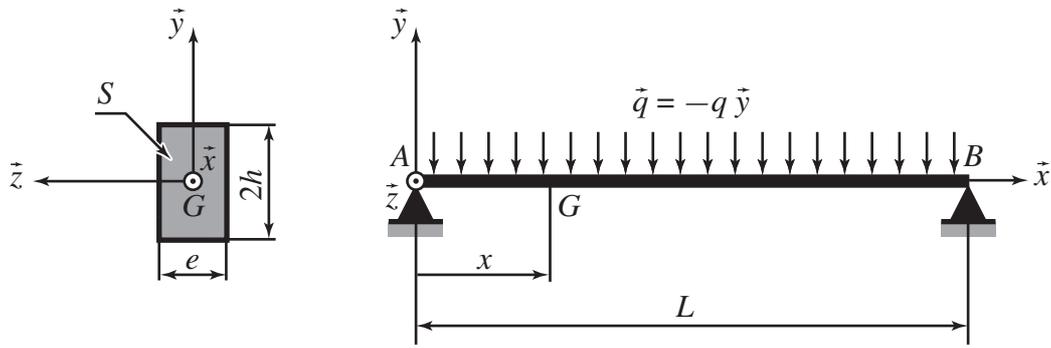


Figure 2 – Poutre bi-appuyée.

(A) Les réactions aux appuis  $A$  et  $B$  sont :

$$\vec{R}_A = \vec{R}_B = qL \vec{y} \quad (1)$$

(B) Le moment fléchissant selon  $\vec{z}$  dans la poutre est :

$$M(x) = \frac{1}{2}q(L-x)x \quad (2)$$

(C) Le moment quadratique de la section  $S$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$ , est :

$$I = \frac{eh^3}{12}$$

(D) La contrainte normale maximale dans la poutre est telle que :

$$|\sigma_{\max}| = \frac{qL^2h}{8I}$$

(E) La flèche maximale dans la poutre est telle que :

$$|v_{\max}| = \frac{qL^4}{2EI}$$

## Exercice 4

On s'intéresse au solide  $S$  représenté sur la **Figure 3**. Il est de forme parallélépipédique, sa masse est notée  $m$  (masse volumique uniforme) et son centre d'inertie  $G$ .

(A) La matrice d'inertie du solide  $S$  exprimée en  $G$  est de la forme :

$$\mathcal{I}(G, S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

(B) L'unité des moments d'inertie  $A$ ,  $B$  et  $C$  est le  $\text{kg.m}^4$ .

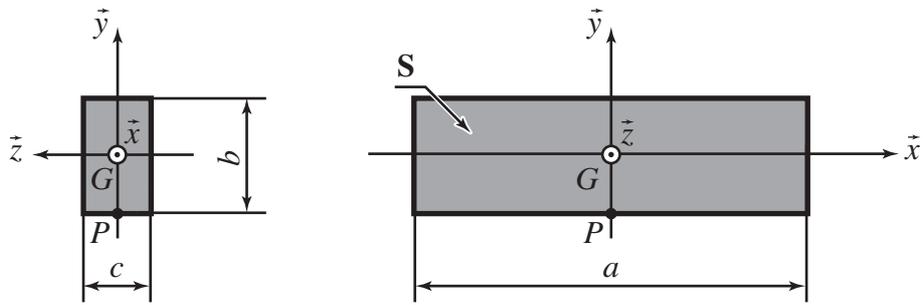


Figure 3 – Géométrie du solide  $S$ .

(C) Le moment d'inertie  $A$  du solide  $S$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{x})$  est :

$$A = \frac{1}{6}m(b^2 + c^2)$$

(D) La matrice d'inertie du solide  $S$  exprimée en  $P$  est de la forme :

$$\mathcal{I}(P, S) = \begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

(E) Le moment d'inertie  $A'$  du solide  $S$  par rapport à l'axe  $(P, \vec{x})$  s'exprime en fonction du moment d'inertie  $A$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{x})$  par la relation :

$$A' = A + m\frac{b^2}{4}$$

## Exercice 5

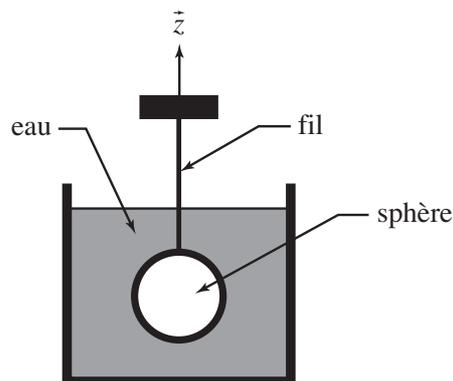


Figure 4 – Sphère immergée dans un réservoir.

(A) Une sphère de rayon  $r$  et de masse volumique  $\rho_S$  est en équilibre, entièrement immergée dans un réservoir d'eau (de masse volumique  $\rho_E < \rho_S$ ) et suspendue par un fil (cf. **Figure 4**). On note  $\vec{g} = -g\vec{z}$  l'accélération de la pesanteur. La tension dans le fil est :

$$T = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_S - \rho_E)g$$

- (B) Un écoulement à faible nombre de Reynolds est dit laminaire.
- (C) Les pertes de charge régulières dans une canalisation sont proportionnelles à la vitesse de l'écoulement.
- (D) On considère un fluide en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ , auquel est lié un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . Le champ de vitesse du fluide par rapport à  $\mathcal{R}$  est supposé connu : en un point  $M$  tel que  $\vec{OM} = x\vec{x} + y\vec{y}$ , on donne  $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = y/b^2\vec{x} + x/a^2\vec{y}$ . Dans ce cas, les lignes de courant sont des ellipses.
- (E) L'unité de mesure de la viscosité cinématique d'un fluide est le stoke ( $1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ).

## Exercice 6

La **Figure 5** représente un solide **1**, de masse  $m$ , en mouvement par rapport à un référentiel galiléen lié à un solide **0**. Le centre de gravité  $G$  de **1** est repéré par  $\vec{OG} = x\vec{x}$ . Le solide **1** est relié au solide **0** par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  et un amortisseur visqueux de coefficient  $\mu$ . On suppose que le contact au niveau de la surface inférieure du solide **1** est sans frottement. En outre, il est soumis à l'action d'un glisseur en  $G$  de résultante  $\vec{F} = F\vec{x}$  avec  $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ . À l'instant initial  $t = 0$ , on suppose que  $x = \ell_0$  et que  $\dot{x} = 0$ . On pose  $x = \ell_0 + q$ .

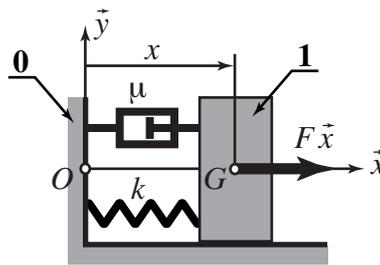


Figure 5 – Solide en vibration

- (A) L'équation du mouvement du solide **S** dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  est :

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F$$

- (B) L'équation du mouvement du solide **S** dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  est :

$$m\ddot{q} + \mu\dot{q} + kq = F$$

- (C) La présence d'amortissement modifie la valeur de la pulsation forcée  $\omega_0$  du système.
- (D) La présence d'amortissement modifie au cours du temps la valeur de l'amplitude du mouvement.
- (E) Les oscillations du système libre associé ont une amplitude qui décroît linéairement au cours du temps.

## Exercice 7

On s'intéresse au système de préhension schématisé sur la **Figure 6**, composé d'un bras  $OA$ , de deux mâchoires  $BP$  et  $B'P'$  et de deux biellettes  $AB$  et  $AB'$  disposées de manière symétrique par rapport à l'axe  $OA$ . Un effort de commande  $F_c$  est exercé sur l'entrée du système en  $O$ . Par symétrie, on pourra effectuer les calculs sur la partie supérieure uniquement. L'effort de commande est transformé en efforts de préhension  $F_p$  et  $F'_p$  par le jeu des biellettes et des liaisons avec le bâti. On suppose dans cet exercice que toutes les liaisons sont parfaites, à l'exception du contact en  $P$  et  $P'$  entre les mâchoires et la pièce à tenir. Le système est paramétré de la manière suivante :  $AB = a$ ,  $BK = b$ ,  $BP = L$ ,  $KC = c$ ,  $\alpha = (\vec{OA}, \vec{AB})$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ),  $\beta = (\vec{OA}, \vec{BP})$ . Par construction, l'angle  $(\vec{BK}, \vec{KC})$  est un angle droit. L'étude du système se fait naturellement à l'équilibre.

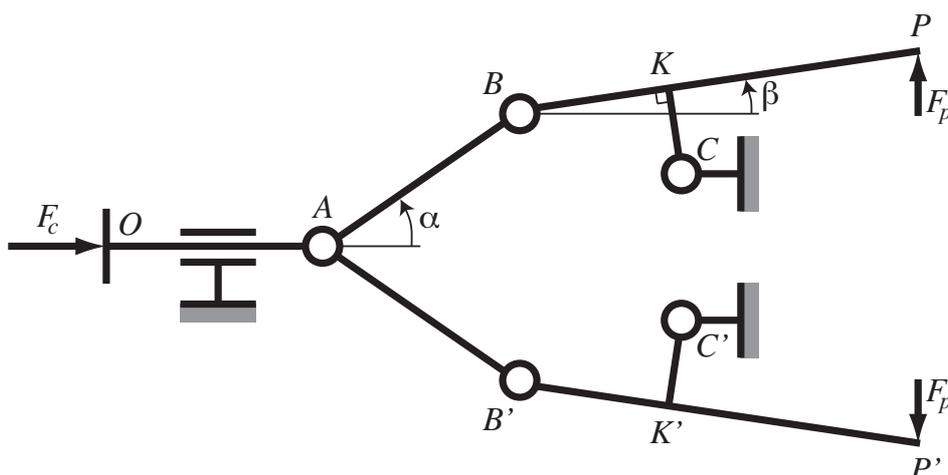


Figure 6 – Système de préhension.

- (A) Dans le cas général ( $\beta > 0$ ), pour assurer l'équilibre de l'objet pincé en  $P$  et  $P'$  entre les deux mâchoires, il faut que le coefficient de frottement  $f$  entre chacune des mâchoires et l'objet considéré vérifie la relation suivante :

$$f \leq \tan \beta + \tan \beta = 2 \tan \beta$$

- (B) Si on étudie le système dans la configuration  $\beta = 0$ , le rapport d'amplification entre l'effort de commande et l'effort de préhension vaut :

$$\frac{F_p}{F_c} = \frac{c + b \tan \alpha}{2(L - b)}$$

- (C) Le rapport d'amplification  $F_p/F_c$  augmente si l'on augmente la longueur  $L$  des mâchoires.  
 (D) Le rapport d'amplification  $F_p/F_c$  augmente si l'on augmente l'angle  $\alpha$ .  
 (E) Le rapport d'amplification  $F_p/F_c$  augmente si l'on augmente la longueur  $b$ .

## Exercice 8

On s'intéresse au mécanisme de transformation de mouvement constitué par un système vis-écrou possédant  $Z$  filets et un pas noté  $p$ . On considère la rotation de la vis comme étant l'entrée du mécanisme, et la translation de l'écrou comme étant la sortie. L'angle de rotation de la vis est noté  $\theta$ , tandis que la translation de l'écrou est  $x$ .

(A) Si  $\theta$  est exprimé en radians, la loi cinématique entrée/sortie du mécanisme s'écrit :

$$x = \frac{Zp}{2\pi}\theta$$

(B) Si  $\theta$  est exprimé en radians, la loi cinématique entrée/sortie du mécanisme s'écrit :

$$x = \frac{Zp}{60 \times 2\pi}\theta$$

(C) Pour que le système vis-écrou puisse être utilisé comme transformateur de mouvement, une possibilité est que la vis soit guidée en rotation par rapport au bâti, et que l'écrou soit guidé en translation par rapport à celui-ci (la direction de la translation correspondant à l'axe de la rotation).

(D) Pour que le système vis-écrou puisse être utilisé comme transformateur de mouvement, une possibilité est que la vis soit guidée en rotation par rapport au bâti, et que l'écrou soit guidé en translation par rapport à celui-ci (peu importe la direction de la translation par rapport à l'axe de la rotation).

(E) On considère une liaison hélicoïdale parfaite entre un solide **1** et un solide **2**. Lorsqu'on écrit le co-moment entre le torseur des actions exercées par **1** sur **2** et le torseur cinématique du mouvement de **2** par rapport à **1**, celui-ci n'est pas nul. En effet, dans le cas d'une liaison hélicoïdale, les éléments non nuls de la résultante d'un des torseurs ne correspondent pas forcément à un zéro dans le moment de l'autre torseur.

## Exercice 9

On considère le vérin double effet de section  $S$  schématisé sur la **Figure 7**, dont on repère la position de la tige par la distance  $x$  par rapport à la position rentrée (à gauche sur la **Figure 7**). La tige du vérin, de masse  $m$ , est reliée au bâti par deux éléments élastiques de raideur  $k$  disposés à chaque extrémité de la tige. On note  $\Delta p = p_1 - p_2$  la pression imposée au vérin, avec  $\Delta p > 0$ . Le vérin est initialement immobile dans la position  $x = 0$  et la course totale est notée  $c$ .

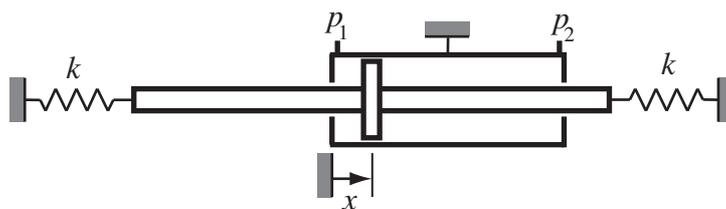


Figure 7 – Vérin double effet.

- (A) On cherche à connaître la vitesse maximale de l'impact lorsque la tige arrive en butée. Si l'on néglige les frottements internes au vérin ainsi que les raideurs  $k$ , la vitesse d'impact est :

$$v_{\text{impact}} = \sqrt{\frac{Sc\Delta p}{m}}$$

- (B) Lorsqu'on prend en compte un effort de norme  $F_f$ , supposé constante, dû au frottement sec entre la tige et la chambre, mais en négligeant toujours les raideurs  $k$ , le temps de sortie de tige est :

$$t_{\text{sortie}} = \sqrt{\frac{2mc}{S\Delta p - F_f}}$$

- (C) On néglige maintenant le frottement mais on tient compte des éléments élastiques. L'application de la pression  $\Delta p$  va donner à la tige un mouvement périodique dont la période est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- (D) Si l'on tient compte d'un frottement de type visqueux en plus des raideurs, le mouvement de la tige est amorti pour terminer à la position d'équilibre :

$$x_{\text{éq}} = \frac{S\Delta p}{2k}$$

- (E) Si l'on tient compte d'un frottement de type frottement sec (de Coulomb) en plus des raideurs, le mouvement de la tige est amorti pour terminer à la position d'équilibre :

$$x_{\text{éq}} = \frac{S\Delta p}{2k}$$

## Exercice 10

On s'intéresse à la modélisation d'une pale du rotor principal d'hélicoptère, présentée **Figure 8**. Le référentiel de l'hélicoptère est noté  $\mathcal{R}_0$  et est muni d'un repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . L'hélicoptère est supposé en vol stationnaire et sans vent, si bien que le référentiel  $\mathcal{R}_0$  est confondu avec le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$ . Le moyeu principal **1** tourne autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  à la vitesse constante  $\Omega$  telle que  $\Omega = \dot{\psi}$ . La liaison entre la pale **4** et le moyeu **1** est modélisée par une rotule de centre  $A$ . Les angles successifs du paramétrage proposé sont  $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ , appelé angle de traînée ;  $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ , appelé angle de battement ; et  $\theta = (\vec{y}_3, \vec{y}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$ , appelé angle d'attaque. Ce dernier angle est commandé par le pilote et reste constant. La distance  $OA$  est notée  $e$ . La longueur de la pale est notée  $L$  et son centre de gravité  $G$ . On a en particulier  $AG = L/2$ . On fait l'hypothèse que l'opérateur d'inertie de la pale exprimé au point  $G$  s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{I}(G, \mathbf{4}) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

- (A) Si, pour simplifier, on modélisait la pale par une plaque d'épaisseur nulle, de forme rectangulaire dans le plan  $(\vec{x}_4, \vec{y}_4)$ , de masse surfacique  $\rho$ , le terme  $C$  de l'opérateur d'inertie précédent serait égal à 0.

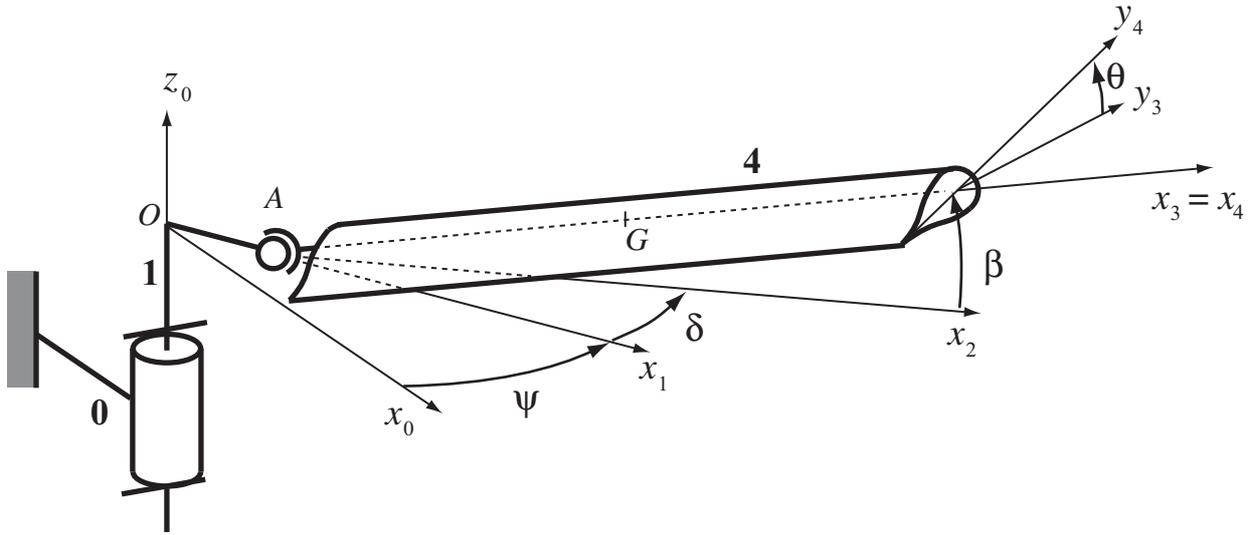


Figure 8 – Modélisation d'un pale principale d'hélicoptère.

(B) L'opérateur d'inertie peut être exprimé en A à partir de sa forme en G par la relation :

$$\mathcal{I}(A, \mathbf{4}) = \mathcal{I}(G, \mathbf{4}) + \begin{bmatrix} mL^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & mL^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & mL^2/4 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

dans laquelle  $m$  est la masse de la pale considérée.

(C) L'opérateur d'inertie peut être exprimé en A à partir de sa forme en G par la relation :

$$\mathcal{I}(A, \mathbf{4}) = \mathcal{I}(G, \mathbf{4}) + \begin{bmatrix} mL^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

dans laquelle  $m$  est la masse de la pale considérée.

(D) La résultante du torseur cinétique de la pale  $\mathbf{4}$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , exprimée dans la base  $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ , s'écrit :

$$\vec{R}_c(\mathbf{4}/\mathcal{R}_0) = e \Omega \begin{vmatrix} \sin \psi \cos \beta \\ \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \beta \sin \theta \\ -\cos \psi \sin \theta + \sin \psi \sin \beta \cos \theta \end{vmatrix} + \frac{L}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ -\dot{\beta} \sin \theta + (\Omega + \dot{\delta}) \cos \beta \cos \theta \\ -\dot{\beta} \cos \theta - (\Omega + \dot{\delta}) \cos \beta \sin \theta \end{vmatrix}$$

(E) Le moment en G du torseur cinétique de la pale  $\mathbf{4}$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , exprimé dans la base  $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  s'écrit :

$$\vec{\sigma}_c(G, \mathbf{4}/\mathcal{R}_0) = \begin{vmatrix} -A(\Omega + \dot{\delta}) \sin \beta \\ B[\dot{\beta} \cos \theta + (\Omega + \dot{\delta}) \cos \beta \sin \theta] \\ C[-\dot{\beta} \sin \theta + (\Omega + \dot{\delta}) \cos \beta \cos \theta] \end{vmatrix}$$

## Exercice 11

On s'intéresse à un hélicoptère de masse totale  $M$  et muni d'un rotor comportant  $N_{\text{pales}}$  pales équi-réparties, chacune de masse  $m$ , et semblables à celles de l'exercice précédent. Pour simplifier, les angles de traînée  $\delta$  et de battement  $\beta$  sont considérés comme nuls. On supposera que l'angle  $\theta$  est très proche de 0, si bien que dans les calculs, on prendra  $\cos\theta = 1$ ,  $\sin\theta = 0$  et  $\vec{z}_4 = \vec{z}_0$ . On néglige en outre l'inertie de l'arbre du rotor (pièce **1** de la **Figure 8**) et on considère l'ensemble des liaisons parfaites. Le mouvement d'une pale est une rotation d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  à la vitesse  $\Omega = \dot{\psi}$  constante.  $\mathcal{R}_0$  est le référentiel attaché au fuselage de l'hélicoptère, en translation verticale par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$ . Dans cet exercice, on suppose que l'hélicoptère possède uniquement un mouvement vertical paramétré par son altitude  $Z(t)$ .

On suppose que les actions mécaniques qu'exercent l'air sur une pale se limitent à la seule force de portance (force aérodynamique exercée verticalement sur la pale) qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{F}_p = \frac{1}{6} \rho a C_p \Omega^2 L^3 \vec{z}_4$$

où les grandeurs  $\rho$ ,  $a$ ,  $C_p$  désignent respectivement la masse volumique de l'air, la corde (dimension verticale) de la pale et un coefficient (appelé classiquement coefficient de portance). Ces grandeurs sont considérées comme des constantes ici.

- (A) L'énergie cinétique de l'hélicoptère dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ , en incluant les pales, peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} M \dot{Z}^2 + \frac{N_{\text{pales}}}{2} \left[ C + m \left( e + \frac{L}{2} \right)^2 \right] \Omega^2$$

- (B) Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'hélicoptère complet permet d'obtenir la relation suivante entre l'altitude et la vitesse de rotation du rotor :

$$M \dot{Z} \ddot{Z} = -Mg \dot{Z} + \frac{N_{\text{pales}}}{6} \rho a C_p L^3 \Omega^2 \dot{Z}$$

où  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur (on ne cherchera pas à résoudre cette équation).

- (C) L'équation précédente est une équation différentielle non linéaire en  $Z$ .  
 (D) Lorsque la vitesse de rotation  $\Omega$  ne peut plus être considérée comme constante, le théorème de l'énergie cinétique donne l'équation suivante :

$$M \dot{Z} \ddot{Z} + N_{\text{pales}} \left[ C + m \left( e + \frac{L}{2} \right)^2 \right] \dot{\Omega} \ddot{\Omega} = -Mg \dot{Z} + \frac{N_{\text{pales}}}{6} \rho a C_p L^3 \Omega^2 \dot{Z}$$

- (E) L'utilisation du théorème de l'énergie cinétique pour l'ensemble (pales+hélicoptère) est incorrecte car il s'agit d'un système de plusieurs solides matériels.

## Exercice 12

On considère un arbre supportant deux poulies trapézoïdales, et guidé en rotation par rapport au bâti, voir **Figure 9**. La poulie d'entrée est de diamètre  $D_1$  et la poulie de sortie de diamètre  $D_2$ . Les deux poulies sont distantes de  $L$ . La poulie d'entrée est soumise, de la part de l'extérieur, à un moment  $C_m \vec{x}$  autour de son axe. La poulie de sortie est soumise, de la part de l'extérieur, à un moment

$C_s \vec{x}$ . On suppose que l'ensemble tourne à vitesse constante et on s'intéresse à la torsion de l'arbre résultant de l'application de ces deux moments, la liaison avec le bâti étant supposée sans frottement. Classiquement, dans le cadre de la théorie des poutres, on prendra comme convention que le torseur de cohésion exprimée au centre  $M$  de la section à l'abscisse  $x$  représente les actions mécaniques intérieures exercées par la partie avale ( $> x$ ) sur la partie amont ( $< x$ ).

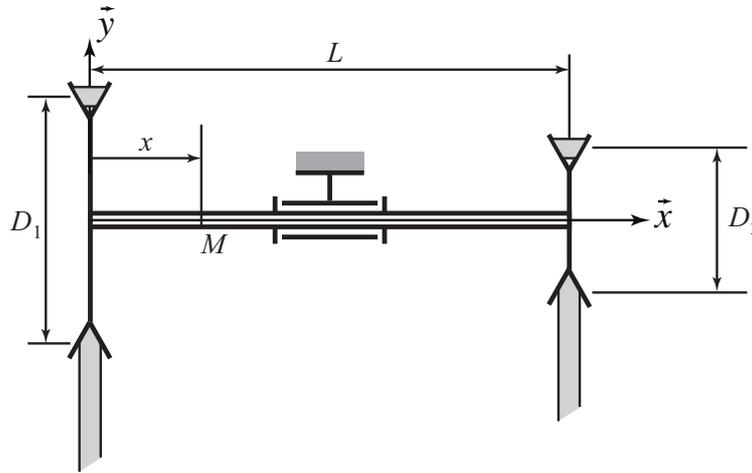


Figure 9 – Transmission par poulies trapézoïdales.

- (A) On peut annuler la torsion de l'arbre si l'on choisit des poulies de même diamètre :  $D_1 = D_2$ .  
 (B) L'angle de torsion en un point  $M$  situé à une distance  $x$  de la poulie gauche est donné par la relation suivante :

$$\theta(x) = \frac{C_s}{EI_x}x + \theta_0$$

où  $\theta_0$  est une constante arbitraire fixée par la convention d'origine.  $E$  et  $I_x$  désignent le module d'Young et l'inertie géométrique autour de l'axe  $(M, \vec{x})$  de la section de l'arbre.

- (C) L'inertie géométrique  $I_x$  de la section autour de l'axe  $\vec{x}$  (aussi appelée moment quadratique polaire) est donnée par la relation suivante :

$$I_x = \frac{\pi D^4}{32}$$

dans laquelle  $D$  est le diamètre de l'arbre cylindrique.

- (D) En supposant qu'on a du frottement dans la liaison, on peut montrer que  $|C_s| > |C_m|$ .  
 (E) Il n'existe pas de courroie trapézoïdale crantée.