

BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS

— SESSION 2010 —

ÉPREUVE DE MÉCANIQUE

CODE ÉPREUVE : BE-MÉCA

CALCULATRICE INTERDITE

DURÉE : 2H30

Exercice 1

Le système étudié est présenté sur la **Figure 1(a)**. Il s'agit d'un disque **2** guidé en rotation sur un arbre **1**, lui-même guidé par une liaison pivot par rapport au bâti **0**. Le disque, d'épaisseur e , de rayon R et de masse M , comporte six usinages identiques répartis angulairement de manière égale (tous les 60°) (voir **Figure 1(b)**). La rotation de l'arbre par rapport au bâti est paramétrée par l'angle α autour de l'axe (O_1, \vec{z}_0) . La rotation du disque sur l'arbre est paramétrée par l'angle θ autour de l'axe (O_2, \vec{x}_1) . On note L la distance entre les deux centres de rotation O_1 et O_2 . I désigne le point du disque tel que $\vec{O_2I} = -R\vec{z}_1$.

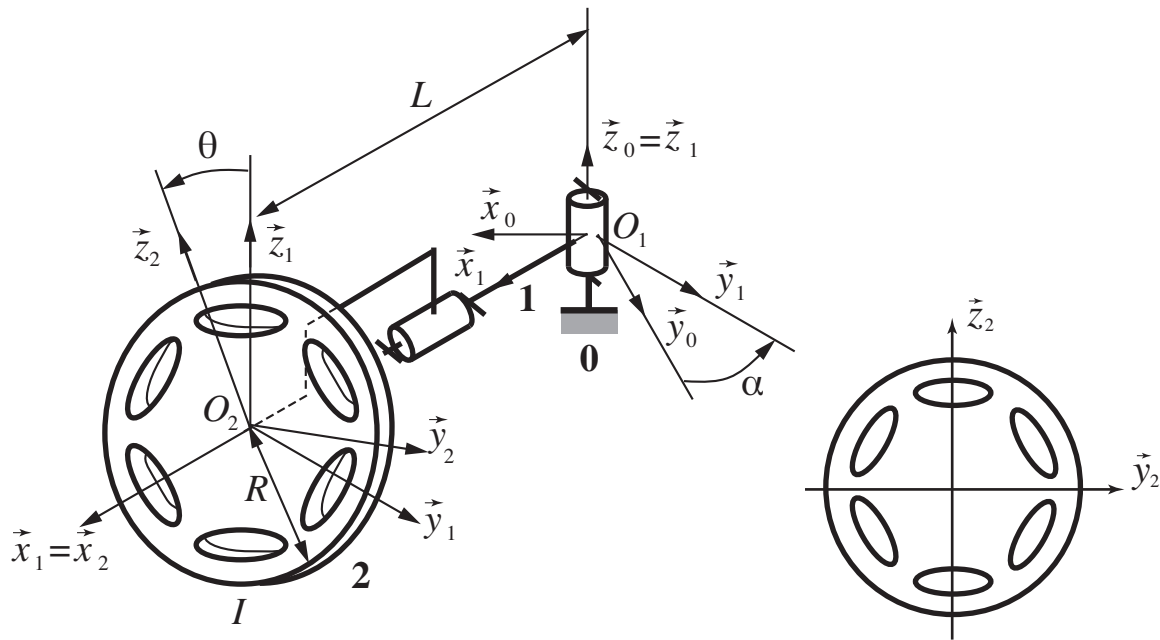


Figure 1 – (a) Disque guidé en rotation par rapport au bâti. (b) Vue de face du disque.

- (A) En toute rigueur et sans connaître les dimensions des usinages, on peut tout de même affirmer à la vue de la **Figure 1(b)** que l'opérateur d'inertie du disque **2** s'écrit comme suit au point O_2 et dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

$$\mathcal{I}(O_2, 2) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

où A et B sont des constantes dépendant de la masse M et des dimensions du disque.

- (B) On décide maintenant de négliger les six usinages pour calculer l'opérateur d'inertie. En faisant l'hypothèse que l'épaisseur e est négligeable devant le rayon R , on peut écrire l'opérateur d'inertie sous la forme :

$$\mathcal{I}(O_2, 2) \simeq \begin{bmatrix} 2C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

où C est une constante similaire à A et B .

- (C) La valeur de C à la question précédente est donnée par :

$$C = \frac{\rho \pi e R^4}{2}$$

(D) Le torseur cinématique du disque **2** dans son mouvement par rapport au bâti **0** s'écrit, au point I :

$$\left\{ \mathcal{V}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{x}_1 \\ (\dot{\alpha}L + R\dot{\theta}) \vec{y}_1 \end{array} \right\}_I$$

(E) En reprenant les notations précédentes, le torseur dynamique du disque **2** dans son mouvement par rapport au bâti **0** s'écrit, au point O_2 :

$$\left\{ \mathcal{D}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} ML\dot{\alpha} \vec{x}_1 \\ 2C\dot{\theta} \vec{x}_1 + C\dot{\alpha} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_2}$$

Exercice 2

L'objet de cette étude est la cinématique d'un système d'ouverture de barrière schématisé sur la **Figure 2**. On note O, A, B, C les centres des liaisons pivots qui guident les différentes pièces, et a, b, c, d les distances entre ces points, comme indiqué sur la **Figure 2**. Le bras BC est en liaison pivot avec le bâti et solidaire d'un arbre moteur tournant à la vitesse $\Omega = \dot{\beta}$. Par l'intermédiaire de la bielle AB , ce bras permet l'ouverture et la fermeture de la barrière OA . La position est dite ouverte lorsque la barrière est à la verticale ($\theta = 0$).

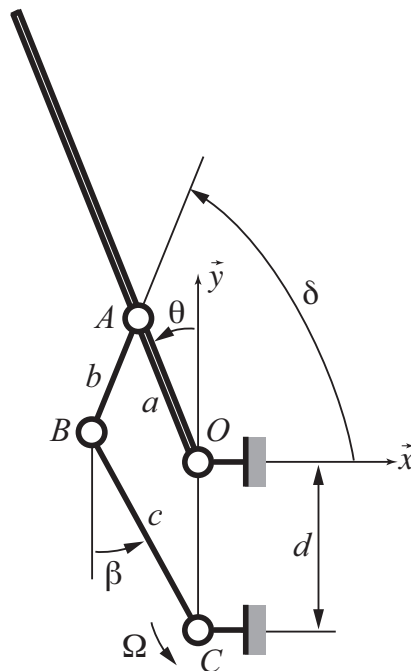


Figure 2 – Système d'ouverture de barrière.

(A) On peut montrer qu'une relation entre les angles d'entrée β et de sortie θ est donnée par :

$$b^2 = a^2 + c^2 + d^2 - 2accos(\theta - \beta) + 2adcos\theta - 2cdcos\beta$$

(B) Si $a + d > b + c$ on peut montrer que le problème précédent n'admet pas toujours de solution.

(C) Si $a + b > c + d$ on peut montrer que le problème précédent n'admet pas toujours de solution.

On fournit la relation suivante entre les vitesses de rotation $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$:

$$2cd\dot{\beta}\sin\beta + 2ac(\dot{\beta} - \dot{\theta})\sin(\beta - \theta) - 2ad\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

(D) Lorsque l'on est proche de la position « barrière ouverte » pour une configuration où $a = c$ et $b = d$, on peut en déduire que $\dot{\theta}$ est proportionnel à $\dot{\beta}$.

(E) On suppose que la vitesse de rotation $\dot{\beta}$ est constante. On peut alors montrer que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est proportionnelle à $\dot{\beta}$.

Exercice 3

On étudie dans cet exercice le système schématisé sur la **Figure 3**. Il comporte un tambour **1'** de rayon r sur lequel est enroulée une corde retenant une masse m . Ce tambour est en liaison pivot avec le bâti **0**, et est solidaire d'une roue dentée **1** qui constitue l'entrée d'un train épicycloïdal. Les satellites sont notés **4** et **4'**, la couronne extérieure **3**. Le porte-satellite, encastré au bâti, est noté **0**.

Ce système comporte un dispositif de freinage inertiel composé de deux masselottes **2** et **2'**, chacune étant de masse M . Les masselottes sont guidées sur l'arbre **1** par des glissières de direction radiale et viennent frotter sur la surface intérieure de la couronne **3**; on notera R le rayon et μ le coefficient de frottement associé. Les ressorts figurés seront négligés : leur fonction est de couper le système de freinage à faible vitesse. On négligera la masse de toutes les pièces, exceptés les masselottes M et la masse m . Dans tout l'exercice, on notera ω_{ij} la vitesse de rotation de la pièce i par rapport à la pièce j autour de l'axe \vec{x} .

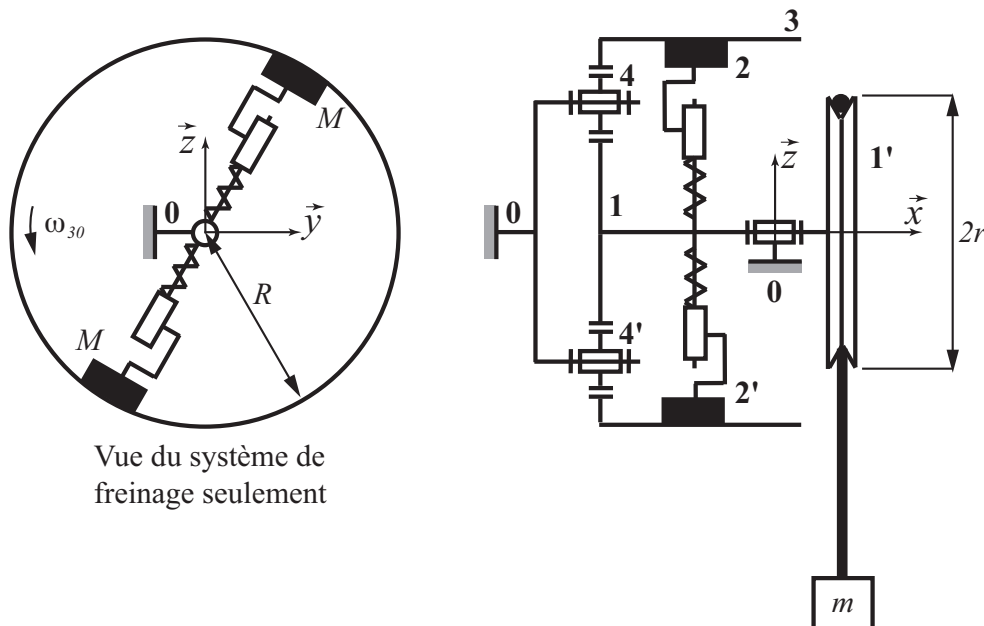


Figure 3 – Système de freinage inertiel.

- (A) En négligeant l'effort des ressorts, on peut montrer que la somme des couples de frottement exercés par les deux masselottes sur la couronne **3** s'écrit :

$$C = 2\mu RM\omega_{10}^2$$

- (B) On note Z_i le nombre de dents de la pièce i dans le train épicycloïdal présenté. On peut établir la relation de Willis suivante :

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{30}} = -\frac{Z_1}{Z_3}$$

- (C) Dans l'hypothèse du frottement de Coulomb, le coefficient de frottement μ augmente avec la vitesse de rotation grâce aux efforts centrifuges.

- (D) Dans l'hypothèse de liaison parfaite entre les solides, la puissance des efforts intérieurs à l'ensemble (**1+2+2'+3+3'+4'**) vaut (au signe près) :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = 2\mu R^2 M\omega_{10}^3 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right)$$

- (E) L'application du théorème de l'énergie cinétique permet d'obtenir la vitesse limite de la masse m :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} \frac{mgr^3}{2\mu MR^2}}$$

Exercice 4

La **Figure 4** montre un schéma de distribution de moteur thermique dans lequel le linguet **5** n'attaque pas la tête de la soupape **1** directement mais par l'intermédiaire d'un poussoir **4** qui est inséré entre la soupape et le linguet. La came, qui n'est pas représentée, exerce un effort au point B via le galet **6**. Au point C le linguet est en liaison pivot avec le bâti **0**. Un ressort de compression **3** assure la fermeture de la chambre de combustion lorsque l'effort de la came sur le linguet est supprimé. L'insert **2** est solidaire du bâti et constitue une glissière parfaite. On distinguera trois parties particulières sur la soupape : la tête, le corps, le pied, comme indiqué sur la figure de droite.

On s'intéresse aux déformations de compression engendrés dans la soupape **1** et dans le poussoir **4** et pour cela on fait les hypothèses suivantes :

- les liaisons sont parfaites ;
- on peut effectuer le calcul de prédimensionnement en statique ;
- la pression p_{max} due à l'explosion ne s'exerce que sur la surface inférieure de la soupape, comme indiqué sur la figure de droite. Axialement, la soupape est donc soumise au total aux efforts du poussoir, du ressort, et à la pression p_{max} ;
- on néglige les déformations dans le pied de soupape, ce qui signifie que la déformation de celle-ci correspond uniquement à la déformation du corps ;
- on note L la longueur du corps de soupape, et l celle du poussoir.

- (A) L'analyse en statique de la soupape permet de montrer que la raideur k du ressort est d'une importance primordiale sur l'allongement ΔL de la soupape.

- (B) Sous les hypothèses formulées, on peut montrer que l'allongement ΔL du corps de soupape vaut :

$$\Delta L = -\frac{p_{\text{max}} L D^2}{E d^2}$$

où E est le module d'Young, D le diamètre du pied et d le diamètre du corps de la soupape.

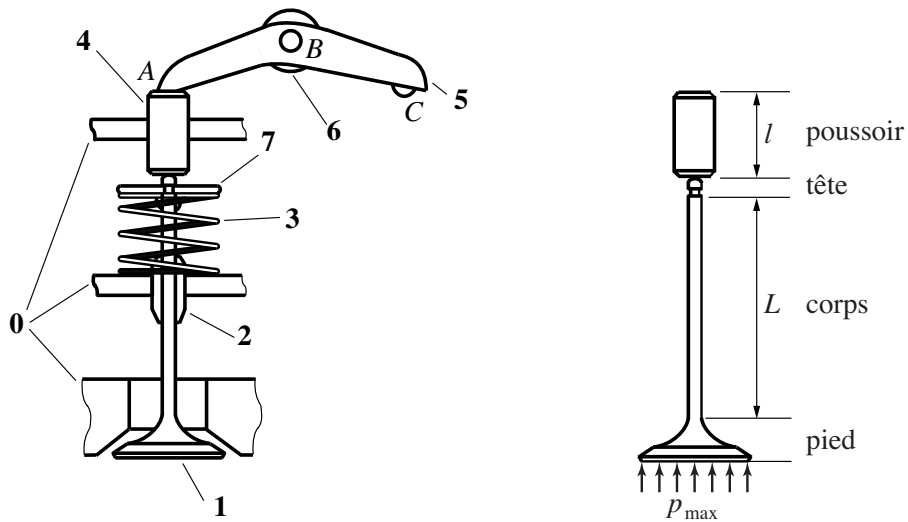


Figure 4 – Montage de distribution et géométrie de la soupape.

- (C) On s'intéresse à la déformation de compression dans le poussoir. L'analyse statique de celui-ci permet de montrer que l'allongement du poussoir est proportionnelle à p_{\max} .

Pour calculer l'effort sur le poussoir, on se ramène à la **Figure 5**. On note L_1 et L_2 les distances AB et BC . θ désigne l'angle d'inclinaison du linguet par rapport à l'horizontale.

- (D) La norme de l'effort au point B entre le galet et la came peut s'écrire, dans l'hypothèse où l'angle θ reste petit :

$$F_B = \frac{L_1 + L_2}{L_2} \left(p_{\max} \frac{\pi D^2}{4} + k((L_1 + L_2)\theta - l_0) \right)$$

où l_0 est la longueur à vide du ressort.

- (E) On peut prévoir que le fait d'avoir négligé la pression sur la surface supérieure du pied de soupape conduit à sous-estimer la déformation des pièces.

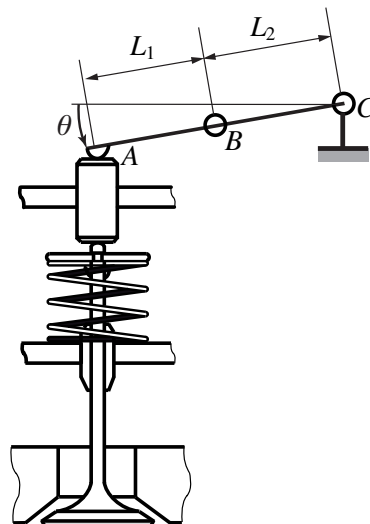


Figure 5 – Simplification de la géométrie pour le calcul de prédimensionnement.

Exercice 5

- (A) Le rapport E/ρ du module d'Young à la masse volumique est sensiblement le même pour un acier usuel que pour un aluminium usuel.
- (B) On effectue un essai classique de traction. Lorsque le matériau est sollicité dans son domaine d'élasticité, la déformation axiale de l'éprouvette est toujours proportionnelle à la contrainte normale exercée.
- (C) En général, un matériau qui est bon conducteur thermique s'avère être un bon conducteur électrique, et inversement.
- (D) L'ordre de grandeur de la résistance élastique d'un acier usuel est de 200 à 400 MPa.
- (E) L'ordre de grandeur du module d'Young d'un acier usuel est de 200 GPa.

Exercice 6

La **Figure 6** présente les spécifications d'une pièce en bureau de conception.

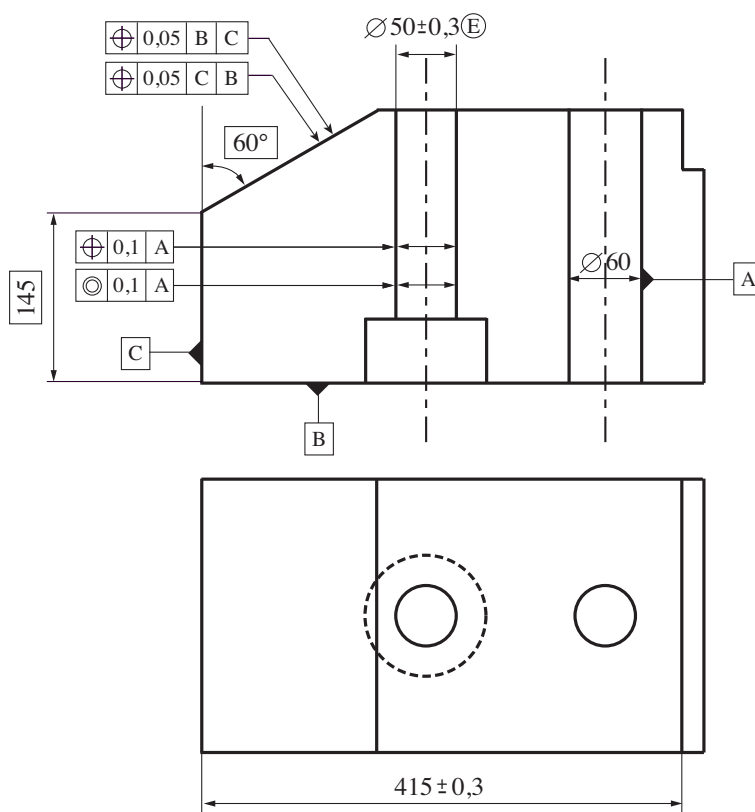


Figure 6 – Spécification d'une pièce.

- (A) Les deux spécifications de tolérance 0,1 sont équivalentes.
- (B) Les deux spécifications de tolérance 0,05 sont équivalentes.
- (C) La spécification dimensionnelle sur la dimension 415 est incorrecte.
- (D) La spécification portant sur le diamètre 50 indique que la forme réelle usinée devra être comprise entre deux cylindres de forme parfaite et de diamètre 49,7 et 50,3, respectivement.
- (E) La spécification portant sur le diamètre 50 indique que toutes les dimensions locales réelles devront être comprises entre 49,7 et 50,3.

Exercice 7

- (A) La vitesse périphérique (vitesse relative de l'arbre et de l'alésage au niveau du joint) admissible par un joint à lèvres peut atteindre 10 m/s.
- (B) La vitesse périphérique admissible par un joint V-ring peut atteindre 100 m/s.
- (C) Plus la vitesse périphérique est grande, plus il est important d'avoir un bon état de surface de l'arbre au niveau du contact avec le joint.
- (D) La vitesse périphérique (vitesse relative de l'arbre et de l'alésage au niveau du coussinet) admissible par un coussinet en bronze ne dépasse pas 0,1 m/s.
- (E) La pression de contact admissible par un coussinet en bronze peut être supérieure à 10 MPa.

Exercice 8

Dans cet exercice, on se propose d'étudier le montage de roulements de la **Figure 7**. Celui-ci permet de guider en rotation par rapport à un carter un arbre supportant un pignon.

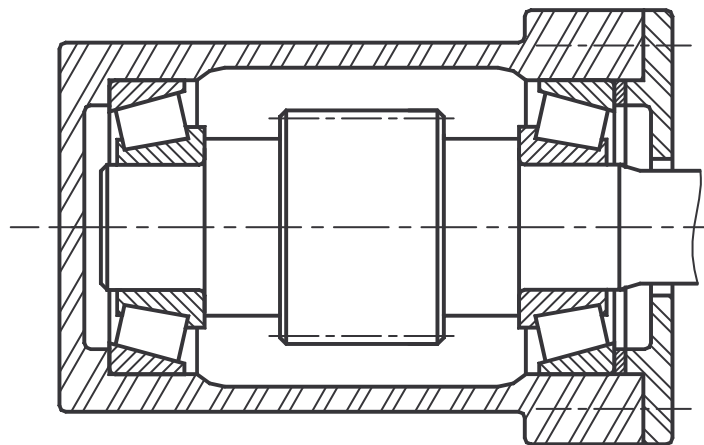


Figure 7 – Montage de roulements.

- (A) Les bagues intérieure et extérieure d'un roulement à rouleaux coniques ne peuvent être désolidarisées.
- (B) Une légère précharge des éléments roulants permet d'augmenter la durée de vie de ce type de roulements.
- (C) Ce type de montage est qualifié de « montage en O » du fait de la disposition des axes de révolution des éléments roulants.
- (D) La durée de vie de tels roulements peut être calculée en utilisant la formule $L = (C/P)^\alpha$ où L est la durée de vie nominale (en tours), C la charge dynamique de base (en kN), P la charge dynamique équivalente (en kN), et $\alpha = 10/3$.
- (E) La durée de vie nominale d'un roulement est associée à un niveau de fiabilité de 90 %.

Exercice 9

Dans cet exercice, on se propose d'évaluer le couple dû aux forces de frottement qui s'exercent entre un coussinet et un arbre lorsque celui-ci est soumis à un effort radial. On considère le montage de la **Figure 8** et on suppose que l'arbre **1**, de rayon R , supporte un effort $\vec{F} = F\vec{y}$ exercé par l'extérieur sur celui-ci. Le calcul du couple de frottement qu'exerce le coussinet **2**, de longueur L , sur l'arbre **1** nécessite celui de la répartition de pression de contact $p(\theta)$ entre ces deux pièces.

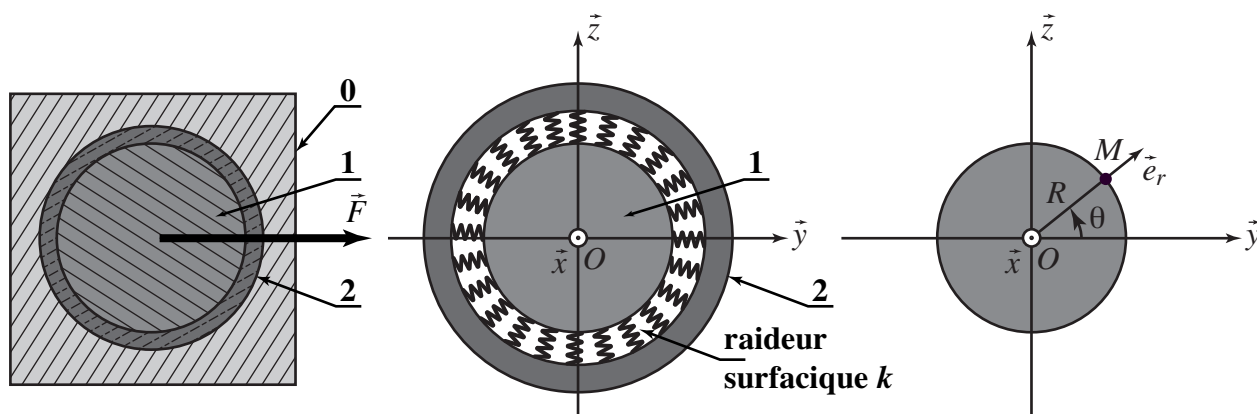


Figure 8 – Montage avec coussinet et modélisation du contact.

La démarche utilisée est la suivante :

- on modélise le contact entre **1** et **2** par une raideur surfacique k , qui n'exerce une réponse qu'en compression (une tension correspond à un décollement des deux pièces, donc à une pression de contact nulle) ;
- on suppose que l'effort radial \vec{F} induit un déplacement global de **1** par rapport à **2** qui est de la forme $\vec{U}(O, 1/2) = U\vec{y}$;
- on détermine le déplacement relatif normal en chaque point $M(\theta)$ de la surface de contact : $U_n(\theta) = \vec{U}(M, 1/2) \cdot \vec{e}_r$;
- en utilisant la relation de comportement $p(\theta) = k\langle U_n(\theta) \rangle_+$ (où $\langle \cdot \rangle_+$ désigne la partie positive), on en déduit l'expression de la pression de contact $p(\theta)$ en fonction du déplacement global U et de la raideur k des ressorts ;
- on écrit l'équilibre de l'arbre **1** sous l'action de cette répartition de pression $p(\theta)$ et de l'effort radial F afin d'éliminer le déplacement U et la raideur k et en déduire l'expression de la pression en fonction de l'effort.
- la répartition de pression $p(\theta)$ étant maintenant connue, on calcule le couple C dû aux forces de frottement lorsque celui-ci est modélisé par le modèle de Coulomb (coefficient de frottement f) et qu'on suppose une rotation relative de **1** et **2**.

(A) Le déplacement relatif normal en un point $M(\theta)$ de la surface de contact est :

$$U_n(\theta) = U \sin \theta$$

(B) La pression de contact $p(\theta)$ entre le coussinet **2** et l'arbre **1** est :

$$p(\theta) = kU \cos \theta \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad p(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

(C) La pression de contact $p(\theta)$ entre le coussinet **2** et l'arbre **1** est :

$$p(\theta) = \frac{2}{\pi RL} F \cos \theta \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad p(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

- (D) Lorsqu'il y a une rotation relative de l'arbre **1** par rapport au coussinet **2**, le couple C qu'exerce le coussinet **2** sur l'arbre **1** par l'intermédiaire des forces de frottement est tel que :

$$|C| = \frac{2}{\pi} fRF$$

- (E) Si la vitesse de rotation de l'arbre **1** par rapport au coussinet **2** est ω , la puissance dissipée par frottement \mathcal{P}_d dans ce montage est :

$$\mathcal{P}_d = \frac{2}{\pi} fRF\omega$$

Exercice 10

La **Figure 9** propose un modèle du linguet de l'**Exercice 4**. Il consiste en une poutre droite de longueur $a + b$, de section rectangulaire $S = e \times 2h$, de module d'Young E . Cette poutre est en appui aux points B et C et sollicitée par un glisseur $\vec{F}_A = F\vec{y}$ à son extrémité A .

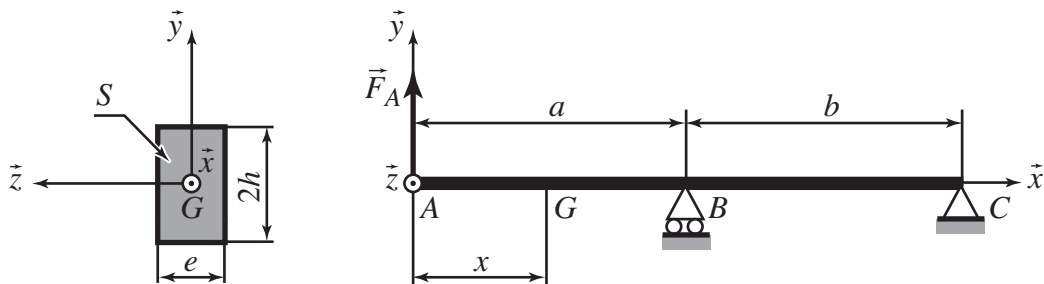


Figure 9 – Arbre en flexion et sa section S

- (A) La réaction d'appui en B est :

$$\vec{R}_B = -F \left(1 + \frac{a}{b} \right) \vec{y}$$

- (B) Le moment de flexion dans la poutre pour $0 \leq x \leq a$ est :

$$M(x) = xF$$

- (C) Le moment de flexion dans la poutre pour $a \leq x \leq b$ est :

$$M(x) = aF \left(1 + \frac{a-x}{a} \right)$$

- (D) Le moment quadratique de la section S par rapport à l'axe (G, \vec{z}) , est :

$$I = \frac{eh^3}{12}$$

- (E) La contrainte normale maximale dans la poutre est telle que :

$$|\sigma_{\max}| = \frac{aFh}{EI}$$

Exercice 11

La **Figure 10** schématise le fonctionnement cinématique d'une barrière automatique. Elle est composée d'un bâti **0**, d'une lisse **1** (liée à la barrière **1'**), d'un excentrique **2** et d'un galet **3**. Le repère $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, lié au bâti **0**, est fixe. Le référentiel correspondant est supposé galiléen. Les liaisons entre **0** et **1**, **0** et **2**, **2** et **3** sont des pivots d'axes (O, \vec{z}_0) , (A, \vec{z}_0) , (M, \vec{z}_0) . Les solides **1**, **2** et **3** sont munis des repères $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $R_3 = (M, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ qui sont tels que $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_3$. La liaison entre **1** et **3** est un linéaire rectiligne d'axe (I, \vec{z}_0) et de normale \vec{y}_1 . On pose $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$, $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ et $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$, mesurés autour de \vec{z}_0 , et on note $\vec{OA} = h\vec{y}_0$, $\vec{OM} = x\vec{x}_1$, $\vec{AM} = R\vec{x}_2$ et $\vec{MI} = r\vec{y}_1$ (où h , R et r sont des constantes tandis que x varie au cours du temps). Enfin, la barrière **1'** est en liaison encastrement avec la lisse **1** de telle sorte que $\theta'_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}'_1) = \theta_1 - \theta_0$ (où θ_0 est une constante).

On suppose que les termes d'inertie sont négligeables devant l'action mécanique exercée par le moteur sur l'excentrique **2** (qui se résume à un couple $\vec{C}_m = C_m\vec{z}_0$) et devant l'action mécanique exercée par la pesanteur sur la barrière **1'** (qui se résume à un glisseur $\vec{P} = -mg\vec{y}_0$ en G tel que $\vec{OG} = L\vec{x}'_1$, la masse de toutes les autres pièces étant négligée). On suppose en outre que toutes les liaisons sont parfaites.

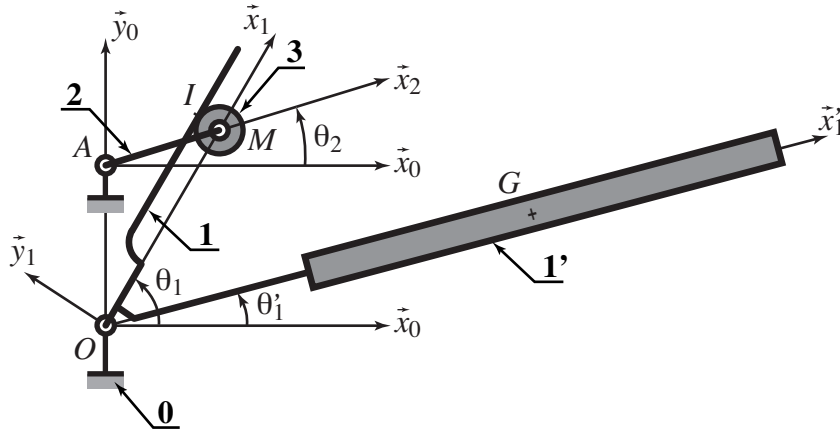


Figure 10 – Barrière automatique.

- (A) En considérant que le modèle est spatial, celui-ci est isostatique.
- (B) Si, uniquement pour cette question, on considérait le modèle plan (dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0)), celui-ci serait isostatique.
- (C) La liaison équivalente entre la lisse **1** et l'excentrique **2** est une sphère-plan de normale \vec{y}_1 .
- (D) Les paramètres d'entrée et sortie du mécanisme sont liés par la loi :

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2 + \frac{h}{R \cos \theta_2} + \frac{h}{r \sin \theta_3}$$

- (E) La barrière **1'** est horizontale ($\theta'_1 = 0$) lorsque l'excentrique est en position $\theta_2 = 0$ si l'on choisit :

$$\theta_0 = \text{Arctan} \frac{h}{R}$$

Exercice 12

On reprend la barrière automatique de l'Exercice 11 et on s'intéresse maintenant à la puissance nécessaire pour actionner celle-ci.

(A) La puissance développée par le moteur pour actionner la barrière est :

$$C_m \dot{\theta}_2$$

(B) La puissance développée par la pesanteur dans le mouvement des pièces par rapport au référentiel galiléen est :

$$-mgL\dot{\theta}_1 \sin\theta'_1$$

(C) Lorsque la barrière **1'** est verticale ($\theta'_1 = \pi/2$), la puissance que doit développer le moteur est nulle.

(D) Le travail de la pesanteur lorsque la barrière **1'** passe de la position horizontale ($\theta'_1 = 0$) à la position verticale ($\theta'_1 = \pi/2$) est :

$$-mgL$$

(E) Le travail de la pesanteur lorsque la barrière **1'** passe de la position horizontale ($\theta'_1 = 0$) à la position verticale ($\theta'_1 = \pi/2$) puis revient à la position horizontale est nul.