

**BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS**

**— SESSION 2009 —**

**ÉPREUVE DE MÉCANIQUE**

**CODE ÉPREUVE : BE-MÉCA**

**CALCULATRICE INTERDITE**

**DURÉE : 2H30**

## Exercice 1

On se propose dans cet exercice d'étudier le montage de roulements présenté sur la **Figure 1**. L'arbre guidé en rotation supporte la roue dentée d'un engrenage à denture hélicoïdale présentant un angle d'hélice de 20 degrés.

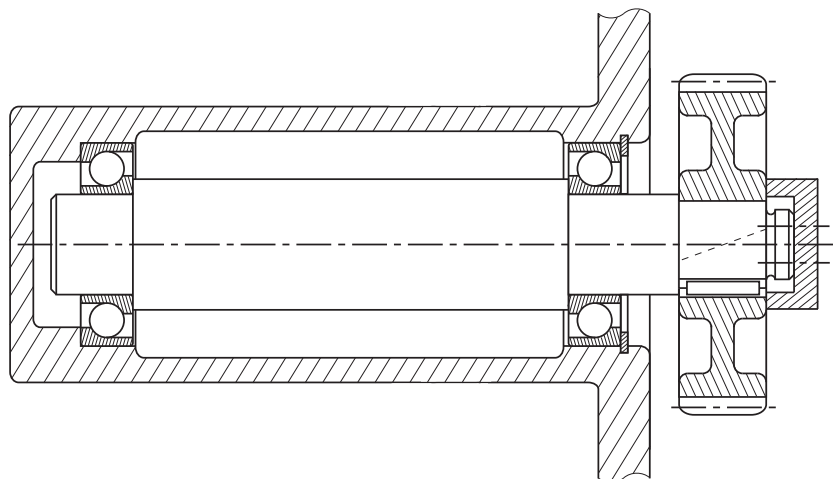


Figure 1 – Montage de roulements

- (A) L'angle d'hélice de l'engrenage à denture hélicoïdale est toujours **strictement** égal à 20 degrés pour des raisons cinématiques.
- (B) Compte tenu de l'angle d'hélice de 20 degrés, les efforts axiaux induits par l'engrènement sont négligeables face aux efforts radiaux et tangentiels pour effectuer le calcul de durée de vie des roulements.
- (C) De manière générale, pour un montage avec un effort en porte-à-faux comme celui présenté sur la **Figure 1**, un montage « en O » est plus rigide qu'un montage « en X ».
- (D) Si les efforts axiaux exercés par la roue dentée sur l'arbre sont toujours dirigés vers la gauche, alors le circlips réalisant l'arrêt axial sur la bague extérieure du roulement de droite est inutile.
- (E) La schématisation présentée à la **Figure 2** est une modélisation correcte du montage de roulements de la **Figure 1**.

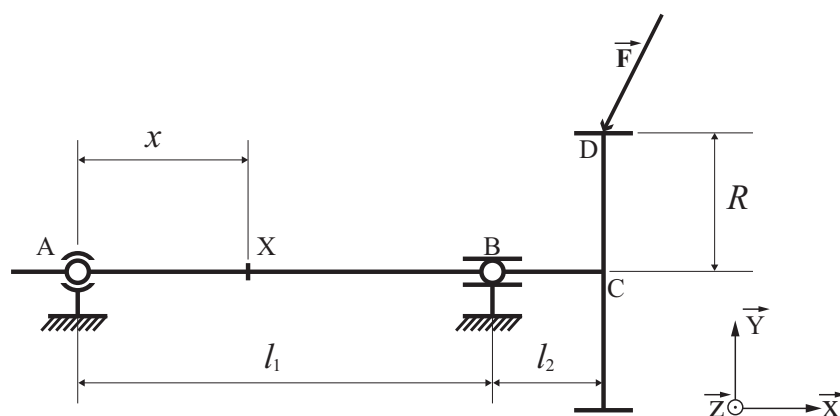


Figure 2 – Schématisation du montage de roulements

## Exercice 2

**Indépendamment** de l'exercice précédent, on s'intéresse à la flexion de l'arbre présenté sur la **Figure 2**. On suppose que l'arbre possède une section creuse représentée sur la **Figure 3**, paramétrée par les rayons intérieur  $R_i$  et extérieur  $R_e$ . On note  $\vec{F}$  l'effort exercé par le milieu extérieur sur la roue dentée, avec :

$$\vec{F} = F_a \vec{X} + F_r \vec{Y}$$

(sur la **Figure 2**,  $F_a$  et  $F_r$  sont négatifs).

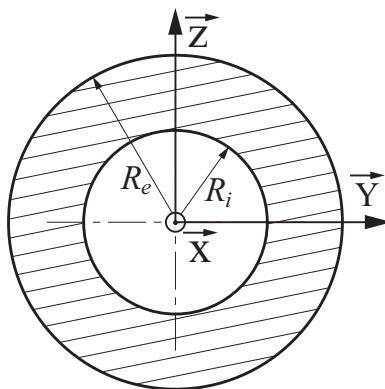


Figure 3 – Section de l'arbre creux

(A) L'inertie de la section de l'arbre par rapport à l'axe  $(C, \vec{X})$  est donnée par :

$$I = \frac{\pi}{2}(R_e^4 - R_i^4)$$

(B) Les actions transmissibles par la liaison en A peuvent être représentées par le torseur suivant :

$$\left\{ \mathcal{T}_A \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_a \vec{X} + (F_r \frac{l_2}{l_1} - F_a \frac{R}{l_1}) \vec{Y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

(C) En A, on a choisi d'utiliser un roulement rigide à billes permettant un certain rotulage. Il n'existe pas de roulement présentant un rotulage supérieur à celui d'un roulement rigide à billes.

(D) Si l'effort  $\vec{F}$  augmente, **l'unique objectif** d'une augmentation du diamètre de l'arbre est de pouvoir utiliser des roulements de taille plus importante, pouvant ainsi supporter des charges statiques et dynamiques supérieures.

(E) Les efforts intérieurs à l'arbre (ou efforts de cohésion) au point X, situé à la distance  $x$  de A (avec  $0 < x < l_1$ ), sont représentables par le torseur suivant :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F_a \vec{X} + (F_a \frac{R}{l_1} - F_r \frac{l_2}{l_1}) \vec{Y} \\ x (F_r \frac{l_2}{l_1} - F_a \frac{R}{l_1}) \vec{Z} \end{array} \right\}_X$$

### Exercice 3

Le système considéré est un dispositif de freinage schématisé sur la **Figure 4**. Un système hydraulique exerce un effort  $F$  sur la garniture, ce qui se traduit par une pression  $p$ , **supposée uniforme**, entre la garniture et le tambour. Le ressort symbolise un élément élastique dont la fonction est d'exercer un rappel de la garniture. On note  $r$  le rayon du tambour,  $e$  sa largeur dans la direction perpendiculaire à la figure et  $\alpha$  le demi-angle qui permet de paramétrer la dimension de la garniture. Enfin, on note  $f$  le coefficient de frottement entre la garniture et le tambour.

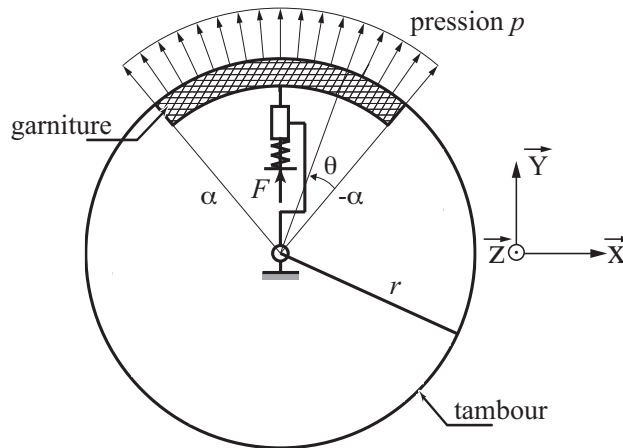


Figure 4 – Système de freinage

- (A) Le ressort symbolisé est réalisé par un empilement de rondelles de type « belleville » (voir **Figure 5**). L'empilement utilisé est un empilement en série, dit aussi « en colonne ». Ce type d'empilement est plus rigide que l'empilement en parallèle, dit aussi « en paquet ».
- (B) Si l'on néglige l'effort du ressort sur la garniture, la pression  $p$  exercée par la garniture sur le tambour est relié à l'effort hydraulique  $F$  par la relation :

$$p = \frac{F}{2er \sin \alpha}$$

- (C) Si l'on néglige l'effort du ressort sur la garniture et qu'on considère  $\alpha$  **petit**, la relation entre le couple de freinage  $C_f$  et l'effort hydraulique  $F$  peut se mettre sous la forme approchée suivante :

$$C_f \simeq r f F$$

- (D) Le couple de matériaux utilisés pour les garnitures de freins classiques en automobile permet un coefficient de frottement de l'ordre de 0,8.
- (E) Il est impossible, pour des raisons physiques, de trouver des couples de matériaux possédant un coefficient de frottement supérieur à 1.

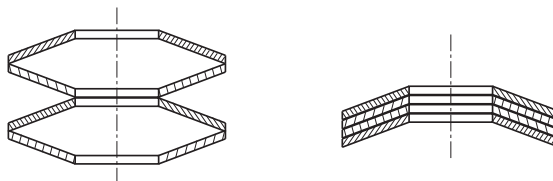


Figure 5 – Empilement de rondelles « belleville » : en série (à gauche) et en parallèle (à droite)

## Exercice 4

Le système schématisé sur la **Figure 6** est inspiré d'un sous-ensemble de bras de robot manipulateur. Le mouvement est commandé par un vérin symbolisé par la liaison glissière d'axe A'C'.

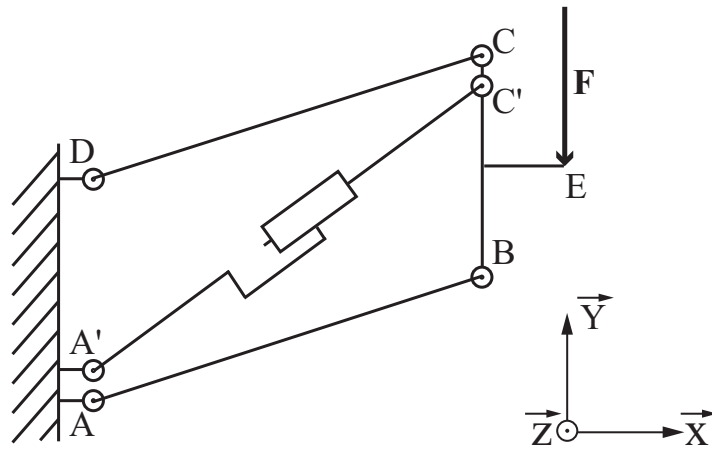


Figure 6 – Sous-système de robot manipulateur

- (A) Le système **étudié dans le plan** est un système isostatique.
- (B) Le système **étudié dans l'espace** est un système hyperstatique d'ordre 5.
- (C) En supprimant la barre CD, on obtient un système isostatique **à la fois** dans le plan et dans l'espace.

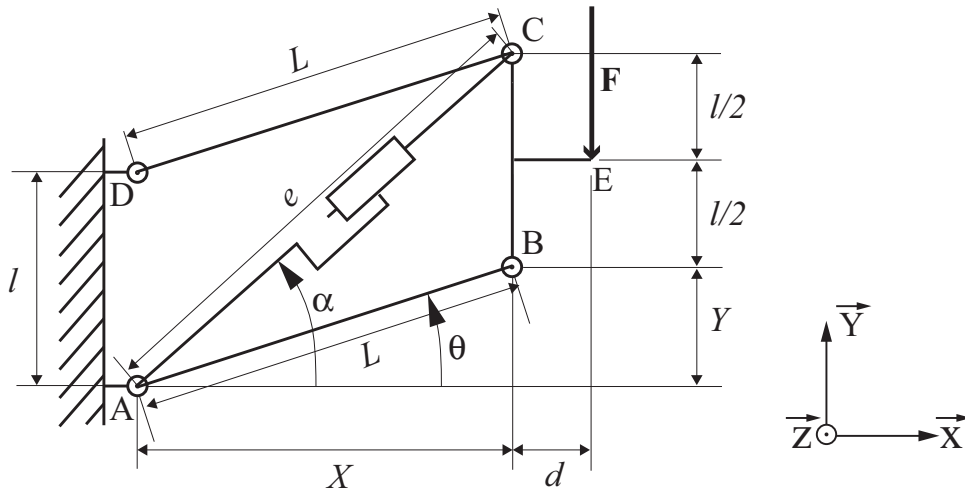


Figure 7 – Version simplifiée du système

**Dans la suite**, on utilisera le schéma de la **Figure 7**, qui est une version simplifiée du système, dans laquelle les points A et A' d'une part, et C et C' d'autre part, sont confondus.

- (D) La loi entrée/sortie du système reliant la longueur  $e$  de la barre AC à la hauteur  $Y$  du point B (voir la **Figure 7**), s'écrit :

$$Y = \frac{e^2 - L^2 - l^2}{2l}$$

(E) La vitesse du centre de liaison B par rapport au bâti, noté  $R_0$ , est égale à :

$$\vec{V}(B/R_0) = \frac{e \dot{e}}{l} \vec{Y}$$

## Exercice 5

On cherche à caractériser les mouvements du système présenté **avec son paramétrage** sur la **Figure 8**. La liaison entre la pièce **1** et le bâti **0** est une liaison hélicoïdale d'axe  $(O_1, \vec{Z}_0) = (O_1, \vec{Z}_1)$ , dont le pas est noté  $p$  et les paramètres de translation et de rotation sont notés  $y = \overrightarrow{O_1 O_2} \cdot \vec{Z}_0$  et  $\alpha = (\vec{X}_0, \vec{X}_1)$ . La liaison entre **1** et **2** est une pivot d'axe  $(O_2, \vec{X}_1) = (O_2, \vec{X}_2)$  paramétrée par l'angle  $\beta = (\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$ . La liaison entre **2** et **3** est une pivot d'axe  $(O_3, \vec{Y}_2) = (O_3, \vec{Y}_3)$  paramétrée par l'angle  $\theta = (\vec{X}_2, \vec{X}_3)$ . On pose  $\overrightarrow{O_2 O_3} = l_2 \vec{Y}_2$  et  $\overrightarrow{O_3 O_4} = l_3 \vec{X}_3$ .

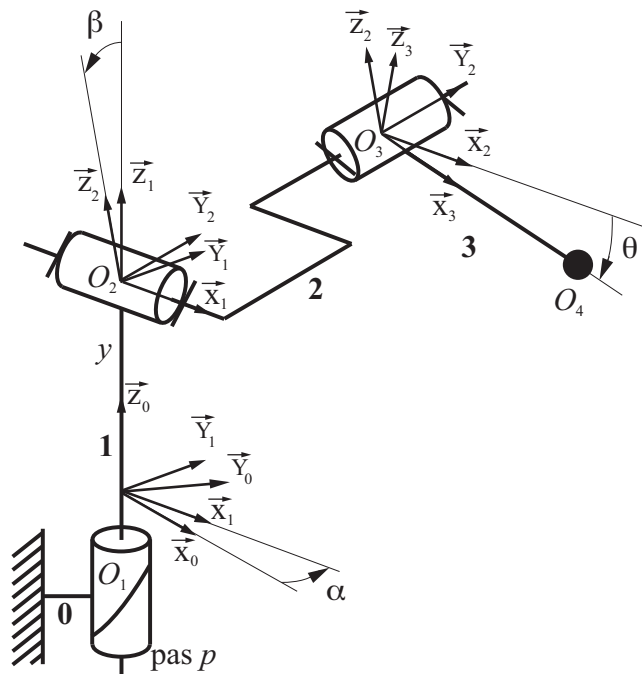


Figure 8 – Paramétrage d'un système robotisé

(A) Le mouvement du solide **3** par rapport au bâti **0** peut être représenté par le torseur cinématique suivant :

$$\left\{ \mathcal{V}(3/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{Z}_1 + \dot{\beta} \vec{X}_2 + \dot{\theta} \vec{Y}_3 \\ \frac{p}{2\pi} \dot{\alpha} \vec{Z}_1 \end{array} \right\}_{O_2}$$

Dans la suite, on néglige la masse et l'inertie des ensembles **1** et **3**. La forme de l'ensemble **2** est schématisée sur la **Figure 9**. La matrice d'inertie au point  $O_2$  de cet ensemble est notée :

$$\mathcal{I}(O_2, 2) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)}$$

Le point  $O_2$  est situé à la distance  $a$  de la face gauche, à la distance  $d_2/2$  de la face avant et à la distance  $d_3/2$  de la face inférieure.

- (B) La matrice d'inertie, exprimée en  $O_2$ , **en tenant compte du perçage**, est diagonale dans la base  $(\vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ .

Dans la suite, on **néglige le perçage et la distance  $a$** . On suppose de plus que la distance  $d_1$  est très grande devant  $d_2$  et  $d_3$ .  $m$  désigne la masse de la pièce.

- (C) On peut alors en conclure que le terme  $A$  de la matrice d'inertie est très grand devant les termes  $B$  et  $C$ .
- (D) Le torseur cinétique de la pièce **2** dans son mouvement par rapport à **0** peut s'écrire au point  $O_2$  :

$$\left\{ C(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m\vec{Z}_1 \\ A\dot{\beta}\vec{X}_2 + C\dot{\alpha}\vec{Z}_2 \end{array} \right\}_{O_2}$$

- (E) L'énergie cinétique du solide **2** dans son mouvement par rapport à **0** s'écrit, quel que soit le point où on la calcule :

$$T(2/0) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} A \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} B \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \frac{1}{2} C \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta$$

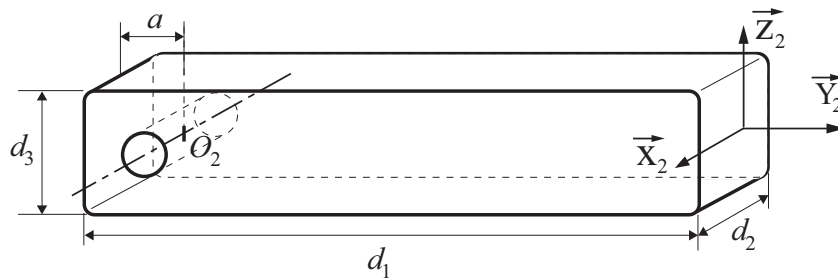


Figure 9 – Forme schématique de l'ensemble **2**

## Exercice 6

- (A) Un emmanchement conique est souvent utilisé pour assembler deux pièces ensemble. Dans ce cas, la valeur de l'angle du cône qui assure l'adhérence est indépendante des matériaux utilisés.
- (B) La réalisation d'un assemblage par vis permet parfois d'assurer une pression suffisante entre les deux pièces pour pouvoir réaliser une étanchéité directe. Dans ce cas, il est souhaitable que les vis assurent à la fois la fonction « Mettre en position » et la fonction « Maintenir en position » d'une pièce par rapport à l'autre.
- (C) La réalisation d'une étanchéité entre deux pièces en rotation nécessite obligatoirement l'utilisation d'un joint à lèvres.
- (D) Le dimensionnement de vis pour réaliser un assemblage boulonné peut se faire **en première approximation** en assimilant les vis à des poutres droites sollicitées en traction.
- (E) Les systèmes à came sont utilisés car ce sont les seuls systèmes à permettre une transmission parfaitement homocinétique.

## Exercice 7

- (A) La trempe d'un acier consiste en un chauffage au-delà de la température d'austénitisation, un maintien à cette température pendant un temps déterminé et un refroidissement à une vitesse déterminée.
- (B) On peut améliorer la résilience d'un acier en réalisant une trempe suivie d'un revenu.
- (C) Une fonte est un alliage de fer et de carbone qui contient au moins 5 % de carbone.
- (D) Un acier faiblement allié est un acier dans lequel la teneur en chacun des éléments d'addition ne dépasse pas 10 %.
- (E) Le coefficient de Poisson d'un matériau est sans unité.

## Exercice 8

La **Figure 10** représente un solide de hauteur  $h$  et de section non constante  $S(z)$  encastré sur le sol en  $z = 0$ . Ce solide est soumis à un chargement surfacique  $-p\vec{z}$  sur sa face supérieure  $z = h$  et à l'action de la pesanteur dont l'accélération est  $-g\vec{z}$ . Enfin, il est constitué d'un matériau homogène isotrope de masse volumique  $\rho$ , de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . Ce solide est modélisé par une poutre droite de hauteur  $h$ , de section  $S(z)$ , encastrée en  $A$  et sollicitée par un glisseur  $-F\vec{z}$  en  $B$ .

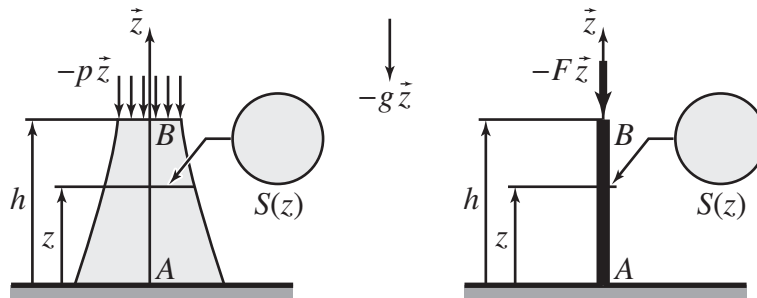


Figure 10 – Solide à section non uniforme et modèle poutre associé

- (A) Dans le modèle proposé, il faut prendre :  $F = (p + \rho g)S(h)$ .
- (B) La réaction du sol sur la poutre est un glisseur de valeur  $F\vec{z}$ .
- (C) La contrainte normale dans la poutre à la cote  $z$  est :

$$\sigma(z) = -p \frac{S(h)}{S(z)} - \int_z^h \rho g \frac{S(x)}{S(z)} dx$$

- (D) Si l'on souhaite que cette contrainte soit uniforme dans toute la poutre, il faut choisir une section telle que :

$$S(z) = S_0 \exp\left(-\frac{\rho g}{p} z\right) \quad \text{où } S_0 \text{ est une constante}$$

- (E) La valeur de cette contrainte est alors :  $\sigma(z) = -pS_0$ .



## Exercice 9

La **Figure 11** représente un solide **1**, de masse  $m$ , en mouvement par rapport à un référentiel galiléen lié à un solide **0**. Le centre de gravité  $G$  de **1** est repéré par  $\vec{OG} = x\vec{x}$ . Le solide **1** est relié au solide **0** par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  et on suppose que le contact au niveau de la surface inférieure du solide **1** est sans frottement. En outre, il est soumis à l'action d'un glisseur en  $G$  de résultante  $\vec{F} = F\vec{x}$  avec  $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ . À l'instant initial  $t = 0$ , on suppose que  $x = \ell_0$  et que  $\dot{x} = 0$ . On pose  $x = \ell_0 + q$ .

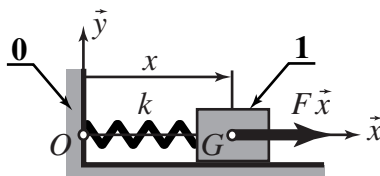


Figure 11 – Solide en vibration

(A) L'équation du mouvement du solide **1** est :

$$m\ddot{x} + kx = F$$

(B) L'équation du mouvement du solide **1** est :

$$m\ddot{q} + kq = F$$

(C) Si on note  $\omega = \sqrt{k/m}$ , la position du solide **1** est régie par :

$$q(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \left( \sin(\omega_0 t) - \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

(D) La fréquence  $f$  de la solution  $q$  est  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ .

(E) La fréquence  $f$  de la solution  $q$  est  $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

## Exercice 10

On reprend le système de la question précédente mais on suppose maintenant que le contact entre le solide **1** et le solide **0** s'effectue avec frottement. Le coefficient correspondant est noté  $f$  et l'accélération de la pesanteur est  $-g\vec{y}$ .

(A) Le solide **1** ne commence à bouger qu'à partir de l'instant  $t_0$  tel que :

$$\sin(\omega_0 t_0) = \frac{fmg}{F_0}$$

(B) À l'instant  $t_0$ , l'effort exercé par le ressort sur le solide **1** est  $F_0 \sin(\omega_0 t_0)$ .

(C) Le travail élémentaire  $\delta W$  des forces de frottement lors d'un déplacement  $dx$  est :

$$\delta W = fmgdx$$

(D) Le travail des forces de frottement lors d'un aller-retour du solide **1** est nul.

(E) Le travail des forces de frottement entre la position initiale  $x = \ell_0$  et la position extrême correspondant à la valeur maximale de  $x$  est égale à l'énergie emmagasinée dans le ressort lorsqu'on arrive dans cette même position extrême.

## Exercice 11

La **Figure 12** représente un barrage encastré au sol et soumis aux actions mécaniques de l'eau. La masse volumique de l'eau est notée  $\rho$ , l'accélération de la pesanteur  $g\vec{z}$  et la pression atmosphérique  $p_0$ .

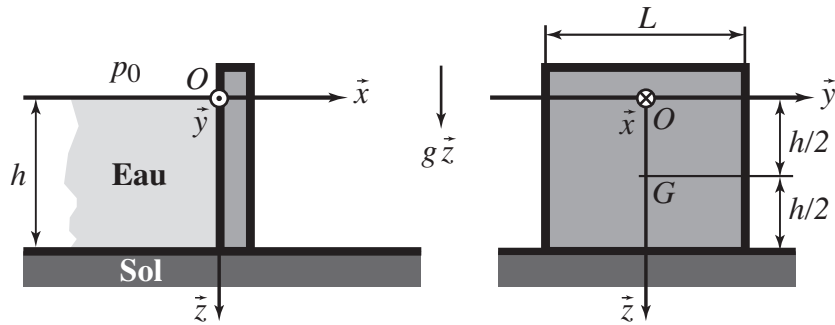


Figure 12 – Force de pression sur un barrage

(A) La résultante, notée  $\vec{F}$ , des actions mécaniques exercées par l'eau sur le barrage est :

$$\vec{F} = Lh(p_0 + \frac{1}{2}\rho gh)\vec{x}$$

(B) La résultante, notée  $\vec{R}$ , des actions mécaniques exercées par le sol sur le barrage est telle que :

$$\vec{R} \cdot \vec{x} = \frac{1}{2}\rho g L h^2$$

(C) Le moment en  $O$ , notée  $\vec{M}_O$ , des actions mécaniques exercées par l'eau sur le barrage est :

$$\vec{M}_O = \frac{1}{3}\rho g L h^3 \vec{y}$$

(D) Le torseur des actions mécaniques exercées par l'eau sur le barrage est un glisseur.

(E) Le centre  $G$  de la surface de contact de l'eau et du barrage appartient à l'axe central du torseur des actions mécaniques exercées par l'eau sur le barrage.

## Exercice 12

La **Figure 13** schématise le fonctionnement cinématique d'une pompe à pistons axiaux dont un seul piston est représenté. Elle est composée d'un bâti **0**, d'un barillet **1**, d'un piston **2** et d'un patin **3**. Ce dernier est en contact avec un plateau-came lié au bâti **0** (angle  $\theta$ ) se traduit par un mouvement alternatif de translation du piston **2** par rapport au barillet **1** (position  $\overrightarrow{OM} = z\vec{z} + r\vec{e}_r$  avec  $r$  constant), ce qui génère un débit de fluide en sortie de la pompe.

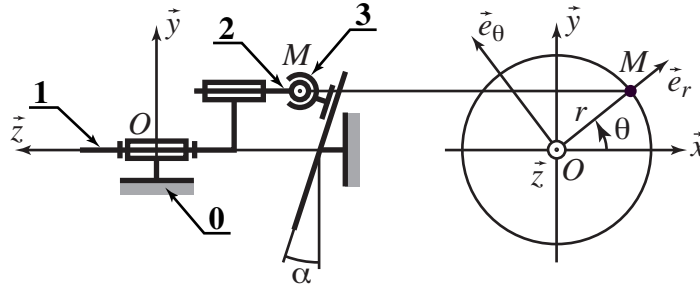


Figure 13 – Pompe à piston axiaux

- (A) La pression dans le circuit hydraulique alimenté par cette pompe est imposée par le couple extérieur exercé sur l'arbre du barillet **1** pour le mettre en mouvement.
- (B) La liaison réalisée entre le piston **2** et le plateau **0** par l'intermédiaire du patin **3** est équivalente à une liaison sphère-plan d'axe  $(M, \vec{z})$ .
- (C) La vitesse du piston **2** par rapport au barillet **1**, exprimée en  $M$ , est :

$$\vec{V}(M, 2/1) = \dot{z}\vec{z} + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

- (D) La vitesse du piston **2** par rapport au bâti **0**, exprimée en  $M$ , est :

$$\vec{V}(M, 2/0) = \dot{z}\vec{z} + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

- (E) Le déplacement  $z$  et l'angle de rotation  $\theta$  sont liés par la relation :

$$\dot{z} = r\dot{\theta}\tan\alpha$$