BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS

— SESSION 2007 —

ÉPREUVE DE MÉCANIQUE

CODE ÉPREUVE : BE-MÉCA

CALCULATRICE INTERDITE

DURÉE : 2H30

Exercice 1

On considère le réducteur épicycloïdal de la **Figure 1**, schématisé par quatre solides (**0**,**1**,**2**,**3**). On suppose que l'arbre d'entrée est le solide **1** et l'arbre de sortie le solide **2**. Le repère $R_0 = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{y})$, lié au solide **0**, est fixe. Le référentiel correspondant est supposé galiléen. Ce réducteur comporte deux engrenages : un premier, composé d'une couronne à Z_0 dents liée **0** qui engrène sur un pignon à Z_3 dents lié au satellite **3** ; un second, composé d'une couronne à Z_2 dents liée **2** qui engrène sur un pignon à $Z_{3'}$ dents lié au satellite **3**. On note $\vec{\Omega}(\mathrm{i/j}) = \omega(\mathrm{i/j})\vec{x}$ le vecteur vitesse de rotation du solide **i** par rapport au solide **j**.

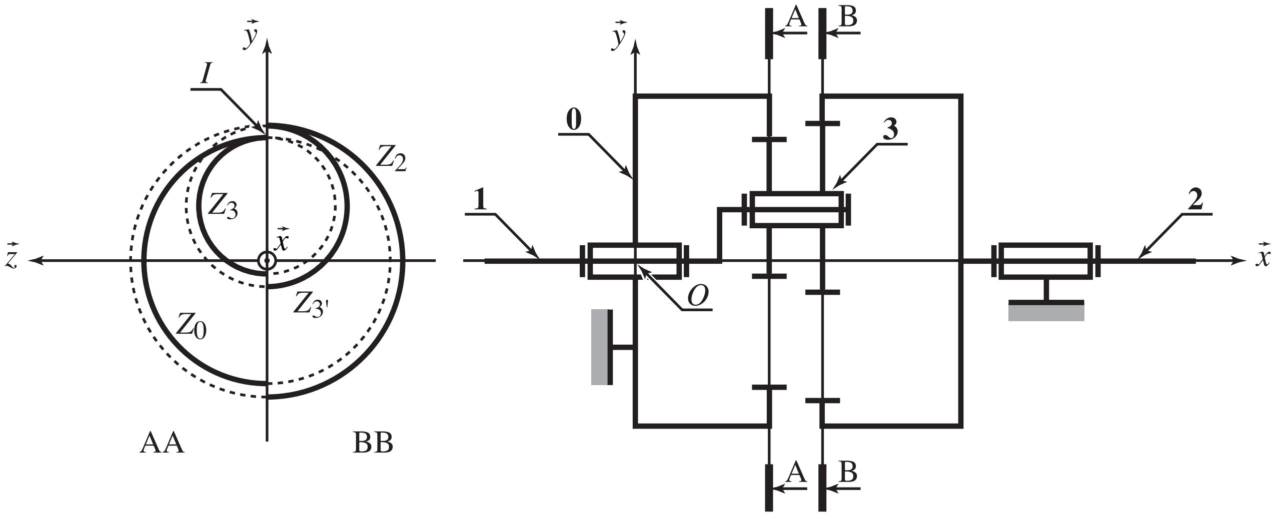

Figure 1 • Réducteur épicycloïdal

(A) Si le contact entre les dents des engrenages est modélisé par une liaison cylindre-plan (anciennement linéaire-rectiligne), le modèle tridimensionnel du réducteur est hyperstatique de degré 1.

(B) Si le contact entre les dents des engrenages est modélisé par une liaison sphère-plan (anciennement ponctuelle), le modèle tridimensionnel du réducteur est isostatique.

(C) Le rapport de réduction du réducteur est :

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = 1 - \lambda \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{Z_0 Z_{3'}}{Z_3 Z_2}$$

(D) Si le référentiel lié au solide **0** n'avait pas été galiléen, le rapport de réduction précédent aurait été modifié.

(E) Dans les trains épicycloïdaux, on préfère généralement utiliser trois satellites afin d'équilibrer les efforts radiaux sur les couronnes. Dans ce cas, le rapport de réduction est divisé par 3.

Exercice 2

On reprend le réducteur de la question précédente et on note G_i le centre de gravité, m_i la masse et I_i le moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_i,\vec{x})$ du solide **i**. On note I le point particulier où il y a roulement sans glissement entre **3** et **0**. On suppose que les actions mécaniques extérieures exercées sur le solide **1** et sur le solide **2** se résument respectivement au point O à un couple $\vec{C}_1 = C_1\vec{x}$ et à un couple $\vec{C}_2 = C_2\vec{x}$.

(A) Le mouvement du satellite **3** par rapport au bâti **0** est une translation circulaire.

(B) La condition de roulement sans glissement en I du solide **3** par rapport au solide **0** se traduit par :

$$\vec{V}(I,3/0) = \vec{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{0}$$

(C) L'énergie cinétique du satellite **3** dans son mouvement par rapport à **0** est :

$$T(3/0) = \frac{1}{2} I_3 \omega^2(3/0) + \frac{1}{2} m_3 \vec{V}^2(G_3, 3/0)$$

(D) Si l'on suppose que toutes les liaisons sont parfaites, la relation qui lie le couple de sortie au couple d'entrée est :

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{\lambda - 1}$$

(E) Soit A un point quelconque. Le moment dynamique du solide **3** dans son mouvement par rapport à **0**, exprimé en A, noté $\vec{\delta}(A,3/0)$, est relié au moment cinétique exprimé en A, noté $\vec{\sigma}(A,3/0)$, par la relation :

$$\vec{\delta}(A,3/0) = \left(\frac{d\vec{\sigma}(A,3/0)}{dt}\right)_{R_0} + m_3 \vec{V}(A,3/0) \wedge \vec{V}(G_3,3/0)$$

Exercice 3

Un des critères de dimensionnement prépondérant dans l'industrie aéronautique est de maximiser la puissance massique, c'est-à-dire réduire au maximum la masse des constituants utilisés pour transmettre une puissance donnée. La **Figure 2** représente un arbre en acier de module d'Young E, coefficient de Poisson ν et masse volumique ρ. Cet arbre est modélisé par une poutre droite de longueur L, sollicitée par un couple $-C\vec{x}$ à son extrémité A et un couple $C\vec{x}$ à son autre extrémité B. On se propose de montrer l'intérêt d'avoir recours à un arbre tubulaire (section S_2 de diamètre intérieur d et de diamètre extérieur D) plutôt qu'à un arbre plein (section S_1 de diamètre ϕ).

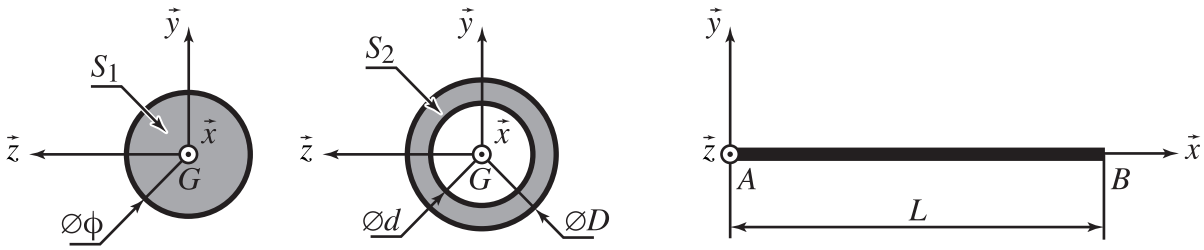

Figure 2 • Arbre en torsion — section pleine S_1 ou creuse S_2

(A) Le module de cisaillement G du matériau peut s'exprimer en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν par l'expression suivante :

$$G = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$$

(B) Le moment quadratique I_2 de la section creuse S_2 par rapport à l'axe $(G, \vec{x})$ est :

$$I = \rho \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

(C) La contrainte maximale dans la section S_2 est atteinte sur le diamètre moyen $\dfrac{d+D}{2}$.

(D) Pour une déformation angulaire identique sous l'action du couple C, le rapport entre la masse m_2 d'un arbre de section creuse S_2 et celle m_1 d'un arbre de section pleine S_1 peut être exprimé en fonction du ratio $\varepsilon = d/D$ par la relation :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1-\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^4}}$$

(E) Pour une déformation angulaire identique sous l'action du couple C, l'utilisation d'une section creuse S_2 avec $\varepsilon = 0,9$ permet de diviser par 10 la masse de l'arbre par rapport à l'utilisation d'une section pleine comme S_1.

Exercice 4

La **Figure 3** représente une sphère **S** de rayon R, immergée dans un récipient rempli d'eau **E**. On note ρ_S la masse volumique du matériau constitutif de la sphère et ρ_E la masse volumique de l'eau. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{z}$ et on suppose que la pression atmosphérique est négligeable. On s'intéresse à la position d'équilibre de la sphère dans le récipient, et notamment à la position relative entre la surface de l'eau et le sommet de la sphère, repéré par $\vec{h} = h\vec{z}$.

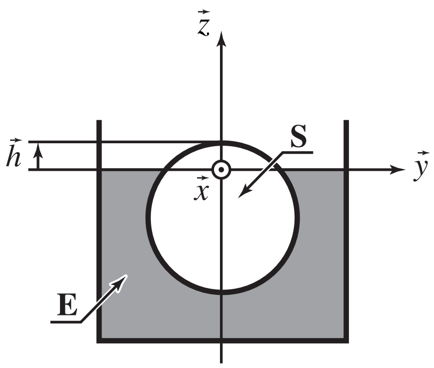

Figure 3 • Équilibre d'une sphère immergée

(A) Si la pression atmosphérique n'avait pas été négligée, une augmentation de 10 % de celle-ci aurait conduit à une diminution de 10 % de h.

(B) Si $\rho_S = \rho_E$, alors $h = 0$.

(C) Si $\rho_S > \rho_E$, alors $h > 0$.

(D) Si $0 \leqslant h \leqslant R$, le volume v de la calotte sphérique qui émerge de l'eau est :

$$v = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$$

(E) Si $\rho_S < \rho_E$, alors la hauteur h peut être déterminée en utilisant la relation :

$$h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\frac{4}{3}R^3\left(1-\frac{\rho_E}{\rho_S}\right)$$

Exercice 5

(A) Un matériau isotrope présente les mêmes caractéristiques mécaniques en tout point de la matière.

(B) Le bronze est un alliage de cuivre et d'étain.

(C) Dans un acier faiblement allié, aucun des éléments d'addition ne dépasse une teneur de 5 %.

(D) La trempe d'un acier a pour effet d'augmenter sa résistance à la rupture sans modifier sa limite élastique.

(E) Un essai de fluage consiste à étudier la déformation d'une éprouvette au cours du temps sous l'action d'efforts appliqués constants.

Exercice 6

L'assemblage représenté sur la **Figure 4** permet une translation entre une tige **1** de diamètre d et un coulisseau **2** de diamètre $d+j$ et de longueur ℓ. On suppose que le jeu j, bien que négligeable devant d ($j \ll d$), permet un basculement du coulisseau par rapport à la tige, ce qui conduit à considérer cet assemblage comme l'association en parallèle de deux liaisons sphère-plan, en A et B. Le contact est modélisé en utilisant la modèle de Coulomb et on note f le coefficient de frottement. Enfin, le coulisseau est soumis à un glisseur $\vec{F}=-F\vec{y}$ ($F>0$) dont l'axe central est distant de L de l'axe de la liaison. On se propose d'étudier le risque d'arc-boutement de cette liaison.

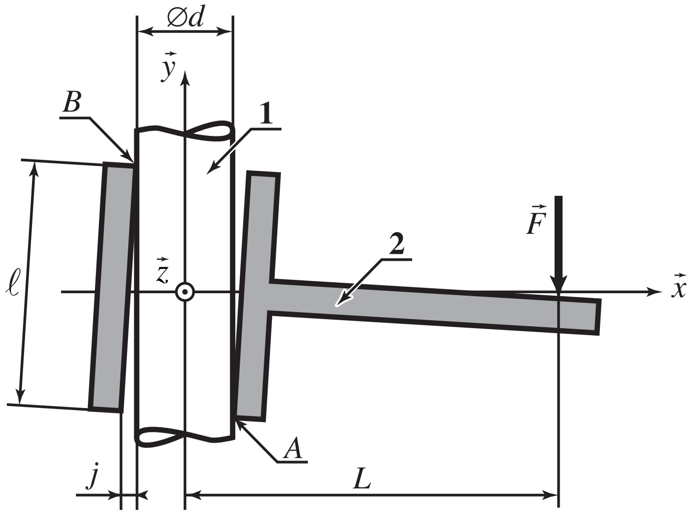

Figure 4 • Arc-boutement d'une liaison

(A) L'arc-boutement est un phénomène lié au frottement qui se traduit par un équilibre indépendant de l'intensité de l'action mécanique qui tendrait à le rompre.

(B) L'action mécanique exercée par **1** sur **2** au niveau du contact en A se traduit par un glisseur :

$$\vec{R}_A(1 \to 2) = N_A\vec{x} + T_A\vec{y} \quad \text{avec} \quad N_A > 0 \quad \text{et} \quad T_A > 0$$

(C) L'action mécanique exercée par **1** sur **2** au niveau du contact en B se traduit par un glisseur :

$$\vec{R}_B(1 \to 2) = -N_B\vec{x} - T_B\vec{y} \quad \text{avec} \quad N_B > 0 \quad \text{et} \quad T_B > 0$$

(D) Le modèle de la liaison est hyperstatique d'ordre 2.

(E) Si l'on suppose qu'on est à la limite du glissement au niveau d'un des contacts, on montre qu'il y a arc-boutement si :

$$L \geqslant \frac{\ell}{2f}$$

Exercice 7

On se propose d'étudier le montage de roulements de la **Figure 5**.

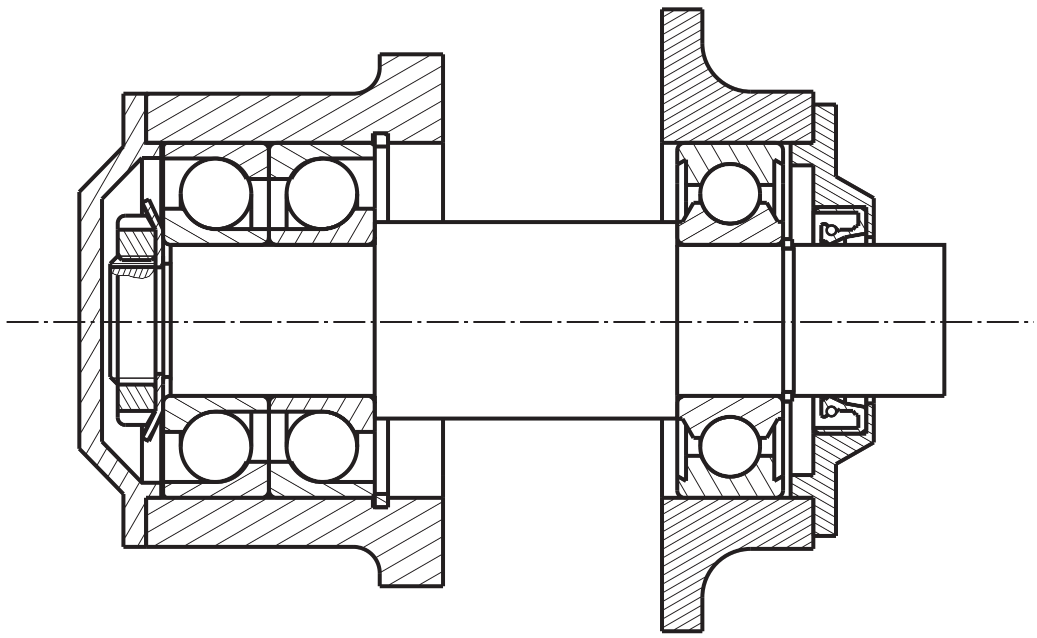

Figure 5 • Montage de roulements

(A) Les deux roulements à billes à contact oblique sont montés de façon à conférer une grande souplesse à la liaison et permettent d'encaisser une charge axiale importante.

(B) Le roulement rigide à billes, tel qu'il est monté, peut être modélisé par une liaison rotule.

(C) Si on modélise chacun des roulements à contact oblique par une liaison rotule et le roulement rigide à billes par une liaison sphère-cylindre, le modèle associé au montage de la **Figure 5** est hyperstatique d'ordre 2.

(D) La liaison équivalente à ce montage est une liaison pivot.

(E) Le joint à lèvre utilisé dans le montage est un joint V-ring.

Exercice 8

On reprend le montage de roulements de la **Figure 5** et on s'intéresse plus particulièrement aux deux roulements à billes à contact oblique. Il est à noter qu'un jeu existe entre les deux bagues intérieures de ces roulements afin de permettre une précharge du montage.

(A) Les roulements à billes à contact oblique sont disposés de façon à former un montage « en X ».

(B) Un montage « en O » est toujours modélisé par une liaison pivot.

(C) La précharge dans le montage de roulements à billes à contact oblique permet d'améliorer la précision du guidage en rotation.

(D) La précharge dans le montage de roulements à billes à contact oblique augmente toujours la durée de vie du montage.

(E) Un montage « en X » permet de reprendre une charge axiale, ce que ne permet pas un montage « en O ».

Exercice 9

La **Figure 6** représente le schéma cinématique d'un joint de cardan constitué de trois solides (**E**,**I**,**S**) en mouvement par rapport à un bâti **B**. Le repère $R = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, lié au bâti **B**, est fixe. Le référentiel correspondant est supposé galiléen. Les différents repères $R_E = (O,\vec{x}_E,\vec{y}_E,\vec{z}_E)$, $R_I = (O,\vec{x}_I,\vec{y}_I,\vec{z}_I)$ et $R_S = (O,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$, liés aux solides **E**, **I** et **S** sont représentés sur la **Figure 6**. On pose $\theta_E = (\vec{y},\vec{y}_E)$ mesuré autour de $\vec{x}$, $\theta_S = (\vec{y}_S,\vec{y}_I)$ mesuré autour de $\vec{x}_s$ et l'angle de brisure $\alpha = (\vec{x}_E,\vec{x}_S)$ mesuré autour de $\vec{z}$. On suppose que les actions mécaniques extérieures exercées sur le solide **E** et sur le solide **S** par des solides autres que le bâti se résument respectivement au point O à un couple $\vec{C}_E = C_E\vec{x}_E$ et à un couple $\vec{C}_S = C_S\vec{x}_S$.

(A) À partir de la condition $\vec{y}_E \cdot \vec{y}_I = 0$, la loi entrée sortie est donnée par : $\tan\theta_S = -\cos\alpha\tan\theta_E$.

(B) Le mécanisme est homocinétique.

(C) En considérant toutes les liaisons comme parfaites et les inerties négligeables, la relation qui lie le couple de sortie au couple d'entrée est :

$$\frac{C_S}{C_E} = -\frac{1+\tan^2\theta_E}{\cos\alpha(1+\tan^2\theta_S)}$$

(D) On considère à présent deux joints de cardan montés en série. Le système est homocinétique.

(E) Le système est homocinétique si les joints sont dans le même plan et que les angles de brisure sont égaux ou opposés.

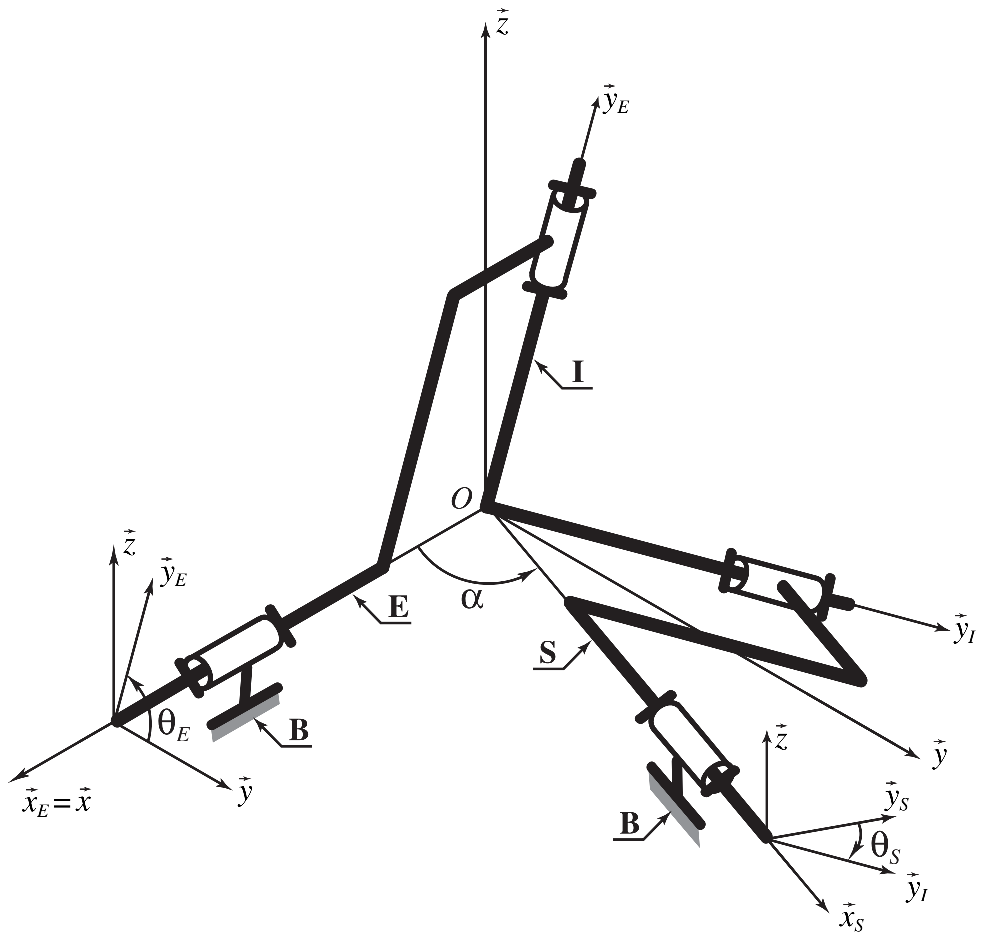

Figure 6 • Schéma cinématique et paramétrage du joint de cardan

Exercice 10

On désire procéder à l'équilibrage d'une roue de véhicule **r**, en rotation par rapport au sol, par ajout sur la jante de deux masselottes $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$. Les données du problème sont les suivantes :

- le sol est muni d'un repère $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$; le référentiel correspondant est supposé galiléen ;
- la roue **r** est munie d'un repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et elle est en rotation à vitesse constante ω autour de l'axe $(O, \vec{z}_0) = (O, \vec{z})$ par rapport au référentiel R_0 ;
- le bord de la jante est représenté par deux cercles de diamètre D distants du point O de $\pm x_c \vec{z}$; ces cercles appartiennent à des plans perpendiculaires à l'axe de rotation de la roue ;
- on note G_r le centre de gravité de la roue **r** et on pose $\overrightarrow{OG_r} = x_r \vec{x} + z_r \vec{z}$;
- les éventuelles masselottes $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$, utilisées pour équilibrer la roue, sont modélisées par des masses ponctuelles m_1 et m_2 situées en G_1 et G_2, avec :

$$\overrightarrow{OG_1} = x_1 \vec{x} + y_1 \vec{y} + z_1 \vec{z}$$
$$\overrightarrow{OG_2} = x_2 \vec{x} + y_2 \vec{y} + z_2 \vec{z}$$

- la matrice d'inertie en O de la roue **r**, exprimée dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est :

$$I(O, r) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

(A) L'ajout d'une seule masselotte fixée sur le bord de la jante permet d'obtenir l'équilibrage statique de la roue.

(B) Le moment dynamique en O de l'ensemble $\mathbf{S} = \{\mathbf{r}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$ dans son mouvement par rapport à R_0 est :

$$\vec{\delta}(O, S/R_0) = m_1\overrightarrow{OG_1} \wedge \vec{\Gamma}(G_1/R_0) + m_2\overrightarrow{OG_2} \wedge \vec{\Gamma}(G_2/R_0) + \left(\frac{d}{dt}(I(O,S)\omega\vec{z})\right)_{R_0}$$

(C) L'équilibrage statique étant supposé réalisé, les équations à vérifier pour obtenir l'équilibrage dynamique sont :

$$m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 + D = 0$$
$$m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 + E = 0$$

(D) L'ajout d'une seule masselotte fixée sur la jante permet d'obtenir l'équilibrage dynamique de l'ensemble bien que l'utilisation de deux masselottes diamétralement opposées soit plus pratique.

(E) Une roue mal équilibrée n'a aucune influence sur la durée de vie des roulements assurant le guidage en rotation de la roue mais a une influence sur l'usure des pneumatiques ainsi que sur le confort de conduite du véhicule.

Exercice 11

On considère le plan donné sur la **Figure 7**.

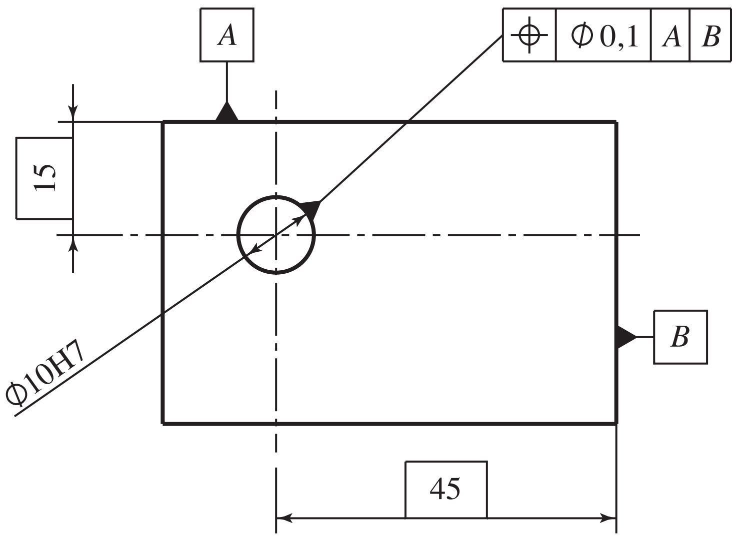

Figure 7 • Spécification géometrique

(A) L'élément tolérancé est le cylindre de diamètre 10 mm.

(B) La zone de tolérance est cylindrique de rayon 0,1 mm.

(C) L'élément de référence est une droite distante de 15 mm de la surface A et de 45 mm de la surface B. La surface A est le plan tangent extérieur matière associé à la surface réelle de la pièce minimisant le déplacement par rapport à celle-ci. La surface B est le plan tangent extérieur matière associé à la surface réelle de la pièce minimisant le déplacement par rapport à celle-ci et orthogonal à la surface A.

(D) La spécification de localisation donnée impose implicitement un défaut de forme (ici cylindrique) inférieur à 0,05 mm.

(E) Un ajustement de type H7/g6 correspond toujours à un montage avec jeu entre un arbre et un alésage.

Exercice 12

On considère l'arbre en flexion 4 points représenté sur la **Figure 8**. La section de cet arbre est constante, rectangulaire de hauteur h et de largeur b. On suppose que cet arbre a un module d'Young E, un coefficient de Poisson ν, et qu'il est modélisé par une poutre droite de longueur L, en appui à ses deux extrémités A et D et sollicitée en B et C par deux glisseurs $\vec{P} = -\frac{F}{2}\vec{y}$.

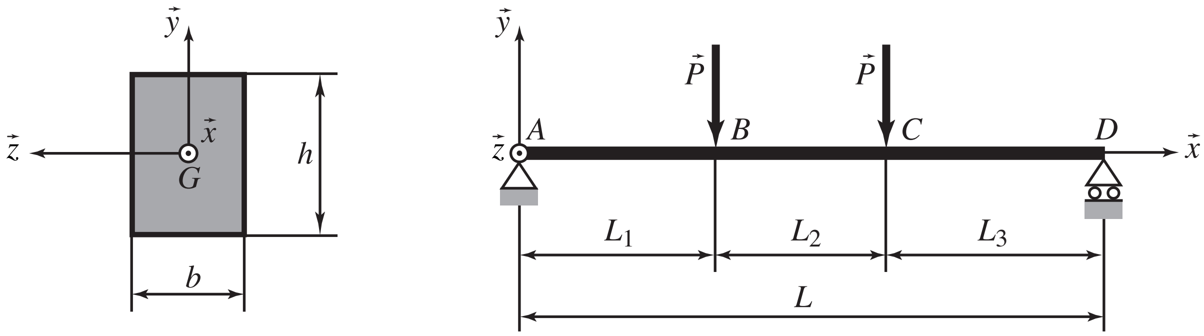

Figure 8 • Arbre en flexion 4 points

(A) Les réactions aux appuis A et D sont :

$$\vec{F}_A = F_A\vec{y} \quad \text{avec} \quad F_A = \frac{2L_3 + L_2}{L}\frac{F}{2}$$
$$\vec{F}_D = F_D\vec{y} \quad \text{avec} \quad F_D = \frac{2L_1 + L_2}{L}\frac{F}{2}$$

(B) Le chargement entre les points d'appui A et D correspond à un chargement de flexion pure.

(C) Si $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{L}{3}$, le moment du torseur de cohésion entre les points B et C se réduit à :

$$\vec{M}_{coh} = \frac{F}{6}\vec{z}$$

(D) À nouveau, si $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{L}{3}$, la flèche v en milieu de poutre est donnée par :

$$v = -\frac{F}{EI}\frac{L^2}{16} \quad \text{avec} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

(E) Il est possible d'utiliser la valeur de la contrainte calculée par la résistance des matériaux pour dimensionner la poutre au niveau de ses appuis.