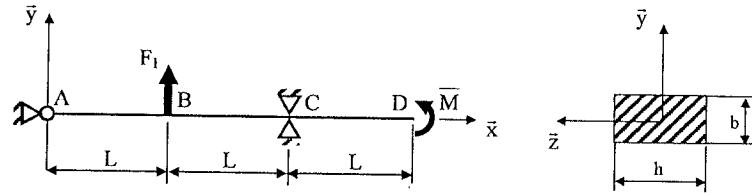


Question 1

On considère une poutre de Bernoulli, en matériau homogène, isotrope de module d'Young E . Le poids propre de la poutre est négligeable devant les efforts extérieurs. Sa section droite est rectangulaire et la longueur de la poutre est $3L$.

Elle est articulée en A, soumise à un effort ponctuel transversal $\vec{F}_1 = F_1 \vec{y}$ en B, simplement appuyée en C et soumise à un moment $\vec{M} = \bar{M} \vec{z}$ en D :

Les positions des différents points ainsi que les dimensions de la section sont données sur le schéma ci-dessous.



(A) Les réactions en A et C, en projection sur l'axe y, sont :

$$R_{yA} = \frac{\bar{M}}{2L} - \frac{F_1}{2}$$

$$R_{yC} = -\frac{\bar{M}}{2L} - \frac{F_1}{2}$$

(B) Le tronçon de poutre C – D est sollicité en flexion pure.

(C) La déformation de flexion en $(x = \frac{3L}{2}, y = \frac{b}{2}, z = 0)$ est égale à :

$$\varepsilon = \frac{3F_1 L - 9\bar{M}}{E h b^2}$$

(D) Si $M > 0$, $F_1 > 0$ et $M > F_1 L$, la contrainte de flexion maximum en valeur absolue dans la poutre est :

$$\sigma_{\max} = \frac{6\bar{M}}{h b^2}$$

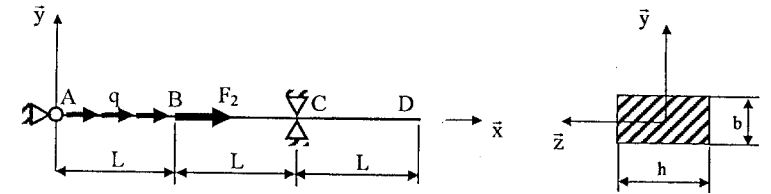
(E) Si $M > 0$, $F_1 > 0$ et $M > F_1 L$, le cisaillement est maximum dans le tronçon A – B.

Question 2

La poutre de la question 1 est maintenant soumise en B à un effort ponctuel longitudinal $\vec{F}_2 = F_2 \vec{x}$. L'extrémité D de la poutre est libre.

De plus un effort longitudinal réparti s'applique sur le tronçon A – B (voir schéma ci-dessous). On note q la force linéique s'exerçant sur A – B (force par unité de longueur). q est **constante** sur le tronçon.

Les caractéristiques de la poutre sont identiques à la question 1.



(A) La réaction en A, en projection sur l'axe x, est :

$$R_{xA} = -F_2 - qL$$

(B) Si $F_2 > 0$ et $q > 0$ la contrainte maximum dans la poutre est égale à :

$$\sigma_{\max} = \frac{F_2 + qL}{bh}$$

(C) La fibre neutre de la poutre ne subit aucune déformation.

(D) Si $F_2 > 0$, $q < 0$ et $q < -\frac{F_2}{L}$, tout le tronçon A – B est sollicité en compression.

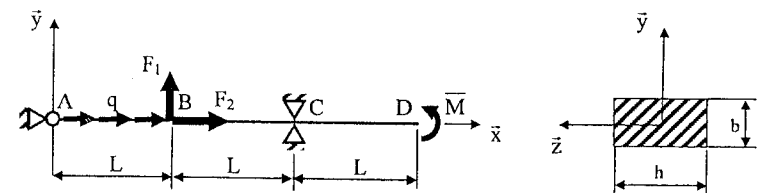
(E) Si $F_2 > 0$, $q < 0$ et $q < -\frac{F_2}{L}$, la condition pour que la contrainte soit maximum en valeur absolue en A est :

$$q < -\frac{2F_2}{L}$$

Question 3

On considère maintenant la poutre des questions précédentes avec le chargement complet :

- efforts F_1 et F_2 en B
- effort linéique constant q sur A – B
- moment \bar{M} en D



(A) les efforts généralisés du torseur des efforts intérieurs dans toute section ne peuvent pas être déterminés en sommant ceux calculés à partir des chargements proposés dans les questions 1 et 2.

(B) Le tronçon C – D est sollicité en flexion pure.

(C) La contrainte issue de la sollicitation de traction – compression en un point quelconque dans le tronçon A – B est égale à :

$$\sigma = \frac{6xy}{hb^3} \left(F_1 - \frac{\bar{M}}{L} \right) + \frac{F_2 + q(L-x)}{bh}$$

(D) La fibre neutre de la poutre ne subit aucune contrainte, si on néglige le cisaillement.

(E) Sur le tronçon A – B, les contraintes de traction - compression en $y = \frac{b}{2}$ (surface supérieure) et en $y = -\frac{b}{2}$ (surface inférieure) sont égales en norme et opposées en signe.

Question 4

On considère le pendule gyroskopique dont le schéma cinématique est donné ci-dessous. Ce mécanisme est constitué :

- d'un bâti S_0
- d'une armature externe S_1 en liaison pivot avec le bâti S_0 .
- d'une armature interne S_2 en liaison pivot avec S_1
- d'un « gyro » S_3 en liaison pivot avec S_2 .

A chaque solide S_i (pour $i = 0, 1, 2, 3$), on lie un repère noté $R_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ tel que (voir schéma) :

- \bar{z}_0 soit vertical ascendant.
- $(O_{0,1}, \bar{x}_{0,1})$: axe de la liaison pivot 0 – 1.
- $(O_{1,2}, \bar{z}_{1,2})$: axe de la liaison pivot 1 – 2.
- $(G_2, \bar{y}_2) = (O_3, \bar{y}_3)$: axe de la liaison pivot 2 – 3.

Si un point ou un vecteur de base a plusieurs indices séparés par des virgules, cela signifie que les points ou les vecteurs de base caractérisés par chaque indice sont identiques. Les dimensions, points et axes sont précisés sur le schéma cinématique.

Hypothèses : - Le repère lié au bâti est supposé galiléen.

- **Toutes les liaisons du mécanisme sont supposées parfaites.**
- Un moteur de masse négligeable, dont le stator est lié à S_2 et le rotor est lié à S_3 , entraîne S_3 en rotation. Il exerce sur celui-ci un torseur d'actions mécaniques noté :

$$F_{\text{mot}/3} \begin{cases} \bar{0} \\ C_m \bar{y}_{2,3} \end{cases}$$

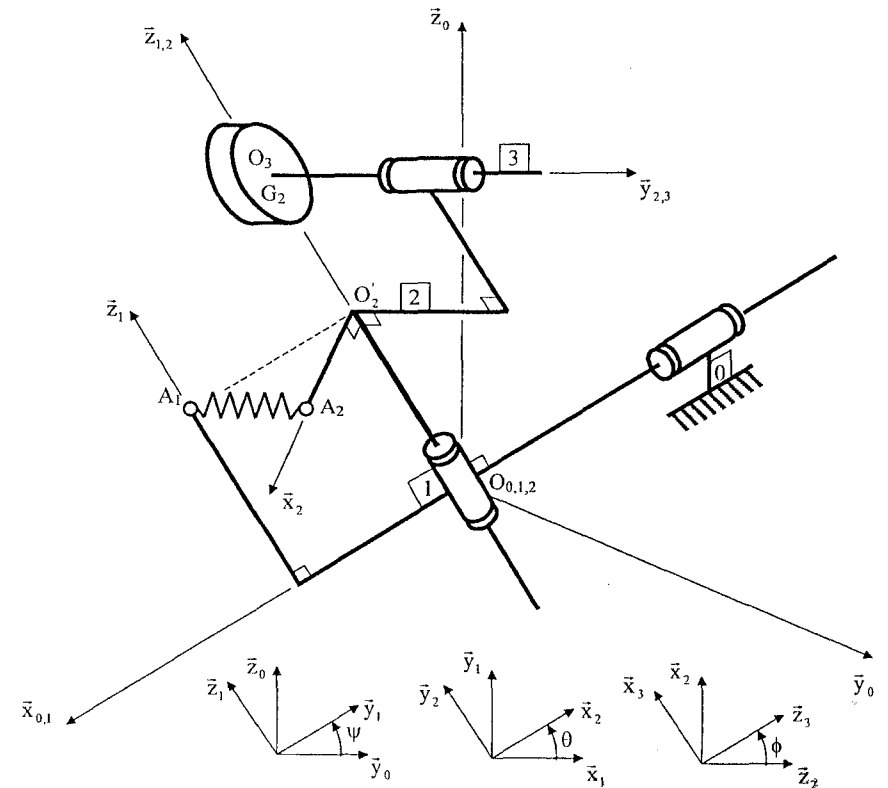
- Un ressort de raideur k , de longueur à vide L_0 est monté entre S_1 et S_2 . Ses extrémités sont articulées en A_1 et A_2

Notation : dans toute la question, le torseur des actions mécaniques transmissibles par un solide S_i sur un solide S_j en un point quelconque P sera noté :

$$F_{i/j} \begin{cases} \bar{F}_{i/j} = \begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{pmatrix}_b \\ \bar{M}_{i/j}(P) = \begin{pmatrix} L_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ij} \end{pmatrix}_b \end{cases} \text{ le numéro de la base étant précisé en indice.}$$

On paramètre le système de la façon suivante (voir schéma ci-dessous) :

- mouvement de S_1 / S_0 : $\psi = (\bar{y}_0, \bar{y}_1) = (\bar{z}_0, \bar{z}_1)$
- mouvement de S_2 / S_1 : $\theta = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$
- mouvement de S_3 / S_2 : $\phi = (\bar{z}_2, \bar{z}_3) = (\bar{x}_2, \bar{x}_3)$



Données géométriques :

$O_2 A_2 = a$

$O_2 A_1 = b \quad (b > a)$

$O_2 O_2' = h$

$O_2 G_2 = L$

Longueur à vide du ressort : $L_0 = b - a$

- (A) Le mécanisme possède un degré de mobilité égale à 1.
- (B) Les paramètres de mouvement ψ , θ et ϕ sont indépendants.

On désire calculer la vitesse du point A_2 par rapport au bâti S_0 en utilisant la méthode de composition des mouvements en considérant le mouvement de S_2 par rapport à S_1 .

- (C) La vitesse relative est alors :

$$\vec{V}^1(A_2) = a \dot{\theta} \vec{x}_2$$

- (D) La vitesse d'entraînement est :

$$\vec{V}_1^0(A_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \dot{\psi} \\ a \dot{\psi} \sin \theta \end{pmatrix}_1$$

- (E) L'axe central du torseur cinématique du mouvement de S_3 par rapport à S_1 est la droite $O_1 O_3$.

Question 5

On considère toujours le mécanisme de la question précédente.

Le solide S_3 est un solide de révolution d'axe (O_3, \vec{y}_3) .

- (A) La forme générale de sa matrice d'inertie en O_3 dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est donc :

$$\bar{I}_{S_3}(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & -E_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -E_3 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

Le solide S_2 possède 2 plans de symétrie $(G_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $(G_2, \vec{z}_2, \vec{x}_2)$. Sa masse est m_2 et on note sa matrice d'inertie en G_2 dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$:

$$\bar{I}_{S_2}(G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

- (B) Quand G_2 appartient à l'axe (O_2, \vec{z}_2) , la matrice d'inertie de S_2 en O_2 dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ a la même forme générale.

- (C) Le moment d'inertie de S_2 par rapport à l'axe (A_2, \vec{z}_2) est égal à :

$$I_{S_2}(A_2, \vec{z}_2) = C_2 + m_2(L - h)^2$$

- (D) La longueur du ressort à un instant quelconque est :

$$l = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

- (E) Si on note l la longueur du ressort à un instant quelconque, le torseur d'action mécanique exercé par le ressort sur S_2 est alors :

$$F_{R/2} \begin{cases} \vec{F}_{R/2} = -k(l - L_0)\vec{y}_2 \\ \vec{M}_{R/2}(A_2) = \vec{0} \end{cases}$$

Question 6

On considère toujours le mécanisme des questions précédentes 4 et 5. G est l'accélération de la pesanteur. G_2 est le centre de masse de S_2 .

- (A) S_3 a pour masse m_3 et pour centre d'inertie O_3 . La puissance développée par l'action de la pesanteur sur S_3 dans son mouvement par rapport à S_0 est :

$$P_{pes/3}^0 = m_3 g L \dot{\psi} \sin \psi$$

- (B) La puissance développée par l'action du moteur sur S_3 dans son mouvement par rapport à S_0 est :

$$P_{mot/3}^0 = C_m \dot{\phi}$$

- (C) L'énergie cinétique de S_2 dans son mouvement par rapport à S_0 est égale à :

$$T_2^0 = \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\psi}^2$$

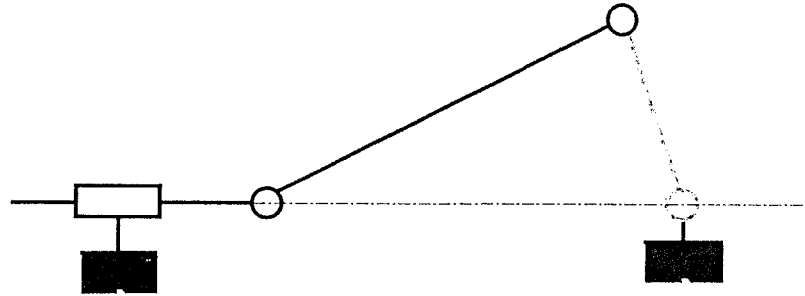
- (D) La puissance des efforts intérieurs développée dans la liaison pivot 1 - 2 est nulle.

- (E) On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide S_2 en vue d'appliquer les théorèmes généraux. Le torseur résultant des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur S_2 est égal à :

$$F_{ext/2} = F_{1/2} + F_{3/2} + F_{pesanteur/2} + F_{ressort/2}$$

Question 7

Considérons le schéma suivant représentant un système bielle-manivelle. Cela peut être, par exemple, la modélisation 3D de la chaîne cinématique d'un moteur thermique à combustion interne. Les rectangles noirs symbolisent le bâti fixe.



- (A) Le degré d'hyperstatisme calculé à partir de ce schéma, qui est une modélisation 3D, est de 2.
- (B) Il n'est pas possible de modifier le mécanisme dont le schéma est donné ci-dessus afin de le rendre isostatique.
- (C) Un mécanisme isostatique est toujours à préférer à un mécanisme hyperstatique.
- (D) Le degré d'hyperstatisme calculé à partir de ce schéma est de 3.
- (E) Si on remplace les liaisons pivots de la bielle avec le piston et avec le vilebrequin par des liaisons rotules alors le degré d'hyperstatisme vaudra 0.

Question 8

Nous considérons encore le système bielle-manivelle dont le schéma est donné dans la question précédente. Le vilebrequin tourne à une vitesse constante de 3500 tours/min. Ce schéma représente un compresseur à piston refoulant à 100 bars. On considère les inerties de toutes les pièces de valeur nulle.

- (A) La bielle est sollicitée en traction
- (B) La bielle est sollicitée en compression
- (C) La bielle est sollicitée en flexion simple
- (D) La bielle est sollicitée en flexion pure
- (E) Si on ne néglige plus l'inertie de la bielle, celle-ci subit seulement une sollicitation de flexion simple.

Question 9

On souhaite construire une liaison pivot entre un arbre et un carter. Etant donné l'encombrement, la longueur de guidage possible est de 10 mm. L'arbre doit avoir un diamètre de 25 mm après calcul de résistance des matériaux. On choisit de fabriquer l'arbre d'un diamètre 25 f7. Ceci lui donne donc une valeur mini de 24,959 mm et une valeur maxi de 24,980 mm. L'alésage aura un diamètre de 25 H7. La valeur mini sera donc de 25 mm et la valeur maxi de 25,021 mm. Pour simplifier les calculs, vous pouvez arrondir la valeur de π à 3.

- (A) Si on construit la liaison sur coussinet, avec un arbre de diamètre 25 mm et avec un jeu correspondant à un ajustement H7f7, l'ordre de grandeur du rotulage entre l'arbre et le carter sera inférieur à 5° d'arc.
- (B) Si on construit la liaison sur coussinet, on peut modéliser son comportement cinématique par une liaison pivot.
- (C) Si on construit la liaison sur roulement à billes à contact radial, on peut admettre 1° de rotulage au droit des roulements.
- (D) Si on monte deux roulements à rouleaux coniques disposés en O, on aura diminué la longueur de guidage par rapport à un montage en X, de même encombrement.
- (E) Si on construit la liaison sur roulement à rouleaux, on peut admettre 20° d'arc de rotulage au droit des roulements.

Question 10

On s'intéresse aux liaisons entre un piston (1) d'une pompe hydraulique à pistons axiaux, un patin (2) et un plateau fixe (3). La figure 1 présente ces liaisons et précise les points A et B ainsi que les vecteurs \vec{x} , \vec{y} , \vec{u} et \vec{v} . Le vecteur \vec{z} est orthogonal à \vec{x} et \vec{y} , et complète le repère direct (O, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}).

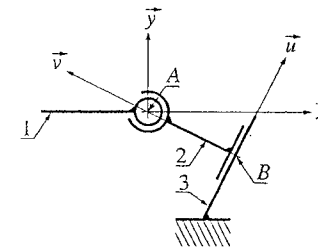


Figure 1

- (A) La liaison entre (2) et (3) est un appui plan de normale \vec{v} .
- (B) La liaison entre (2) et (3) est une liaison glissière d'axe \vec{u} .

- (C) La liaison entre (1) et (2) est une liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{z}) .
- (D) La liaison équivalente entre (1) et (3) par l'intermédiaire de (2), est une liaison ponctuelle de centre A et de normale \vec{x} .
- (E) La liaison équivalente entre (1) et (3) par l'intermédiaire de (2), est une liaison ponctuelle de centre A et de normale \vec{v} .

Question 11

On considère un réducteur à engrenage cylindrique hélicoïdal constitué d'un arbre d'entrée (e) auquel est lié un pignon (1) dont le nombre de dents est Z_1 et le centre O_1 , et d'un arbre de sortie (s) auquel est lié un pignon (2) dont le nombre de dents est Z_2 et le centre O_2 . La figure 2 donne le schéma de ce réducteur. Les diamètres de fonctionnement de (1) et (2) sont respectivement d_1 et d_2 , et l'entraxe est a . On désigne par ω_e et ω_s les vitesses de rotation de (1) et (2), par rapport au bâti, en projection sur l'axe \vec{x} .

L'action de (1) sur (2) est modélisée par le torseur (où $F \geq 0$) :

$$F_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} -F \sin \beta \vec{x} - F \cos \beta \sin \alpha \vec{y} + F \cos \beta \cos \alpha \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

I est le point particulier où il y a roulement sans glissement entre (1) et (2). La position du centre des paliers par rapport au plan de l'engrènement est donnée par la longueur $e = 40$ mm. Ces paliers sont réalisés par des bagues autolubrifiées standards. En particulier, le montage du palier placé entre l'arbre (s) et le bâti possède les caractéristiques suivantes : le diamètre de l'arbre est $D = 30$ mm, la longueur du palier est $l = 60$ mm, l'ajustement entre l'arbre et le palier est de l'ordre de $\text{Ø}30\text{H}7f7$, ce qui correspond à un jeu mini au diamètre de $20 \mu\text{m}$, et un jeu maxi au diamètre de $60 \mu\text{m}$.

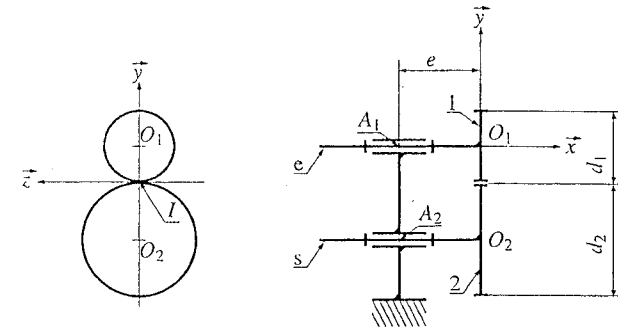


Figure 2

- (A) Le rapport de vitesses est $\omega_s / \omega_e = -d_1 / d_2$
- (B) Le rapport de vitesses est $\omega_s / \omega_e = -Z_2 / Z_1$
- (C) Le moment en O_2 de l'action de (1) sur (2) est $\vec{C} = Fd_2 (\sin \beta \vec{z} + \cos \beta \cos \alpha \vec{x})$
- (D) Si $\beta = 0$, le palier placé entre (s) et le bâti (0) doit supporter un couple en son centre A_2 , dont l'intensité est $(e^2 + d_2^2 \cos^2 \alpha)^{1/2} F$
- (E) L'amplitude maximale du déplacement du point O_2 , dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) , dû au jeu dans le palier entre l'arbre (s) et le bâti, est compris entre $70 \mu\text{m}$ et $140 \mu\text{m}$.

Question 12

Toujours à partir du même réducteur que celui de la question 11, on suppose que l'arbre (s) n'est sollicité que par un couple $C\vec{x}$, qui conduit à avoir une contrainte maximale dans une section de l'arbre notée σ_c . Cet arbre est creux et de section circulaire, comme décrit sur la figure 3 ; le diamètre intérieur est noté d , et le diamètre extérieur est noté D . Il est réalisé en acier de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν .

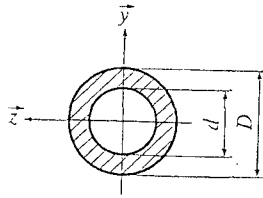


Figure 3

- (A) L'ordre de grandeur de E est compris entre 100 MPa et 1000 MPa.
- (B) L'ordre de grandeur de E est compris entre 100 GPa et 1000 GPa.
- (C) La contrainte maximale dans la section est atteinte sur le diamètre $(d + D) / 2$
- (D) La contrainte maximale dans la section vaut.

$$\sigma_c = \frac{16 D C}{\pi (D^4 - d^4)}$$

- (E) Si le critère de dimensionnement est la limite d'élasticité, multiplier les diamètres D et d par un coefficient α ($\alpha > 1$) permet de multiplier le couple maximal C que peut supporter l'arbre par un coefficient α^2 .