

C O N C O U R S A T S
-SESSION 2017-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 muni de sa base orthonormée canonique \mathcal{B} .

Soient p l'application $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par : $p((x, y, z, t)) = \left(\frac{x}{2} + \frac{z}{2}, y, \frac{x}{2} + \frac{z}{2}, t\right)$,

et l'endomorphisme s de \mathbb{R}^4 ayant dans la base \mathcal{B} la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dans cette question, nous étudions l'application p .
 - (a) Montrer que p est une application linéaire.
 - (b) Donner la matrice P de p dans la base canonique \mathcal{B} .
 - (c) Montrer sans calcul que P est diagonalisable.
2. Dans cette question, nous étudions la matrice S et l'endomorphisme s .
 - (a) Calculer S^2 .
 - (b) Montrer sans calcul que S est diagonalisable.
 - (c) Déterminer le polynôme caractéristique de S sous une forme factorisée. Montrer que S admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 à préciser avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
 - (d) Donner la multiplicité des valeurs propres λ_1 et λ_2 .
 - (e) Exprimer le vecteur propre u_1 de s associé à la valeur propre λ_1 dont la première composante dans la base \mathcal{B} est -1 .
 - (f) Donner trois vecteurs propres u_2, u_3 et u_4 (linéairement indépendants) de s pour la valeur propre λ_2 . On les choisira avec des composantes égales à 1 ou 0 .
 - (g) Donner une matrice inversible U et une matrice diagonale D telles que $S = UDU^{-1}$. On ne demande pas de calculer U^{-1} .
 - (h) Calculer S^{2017} .
3. Dans cette partie, nous caractérisons les espaces $F = \text{Vect}(u_1)$ et $G = \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.
 - (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 .
 - (b) Montrer que si $v \in F$ et $w \in G$ alors v et w sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique.
 - (c) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
4. Dans cette partie, nous cherchons à caractériser l'application linéaire p .
 - (a) Calculer p^2 ($p^2 = p \circ p$).
 - (b) Calculer $p(u_1), p(u_2), p(u_3)$ et $p(u_4)$.
 - (c) Déterminer les valeurs propres et une base de \mathbb{R}^4 formée de vecteurs propres de p .

- (d) Donner une matrice inversible V et une matrice diagonale Δ telles que $P = V\Delta V^{-1}$.
On ne demande pas de calculer V^{-1} .
- (e) Caractériser géométriquement l'application linéaire p .

Exercice 2

Soit c un nombre réel non nul. On considère les fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , toutes deux 2π -périodiques et définies sur $[-\pi, \pi[$ par

$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \quad f(t) = e^{ct} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \text{ch}(ct).$$

1. Dans cette question seulement, on suppose $c = 1$. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. On précisera sur cette figure les valeurs de f aux points de discontinuité. On donne $e^{-\pi} \simeq 0,04$, $e^{\pi} \simeq 23,14$.
2. On note

$$Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \quad \text{et} \quad Sg(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin(nt)$$

les séries de Fourier respectives de f et g .

- (a) Calculer le coefficient a_0 .
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$a_n = \frac{2(-1)^n c \text{sh}(c\pi)}{\pi(c^2 + n^2)}.$$

Indication : on pourra utiliser $\cos(nt) = \text{Re}(e^{int})$.

On rappelle que $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1} n \text{sh}(c\pi)}{\pi(c^2 + n^2)}.$$

3.
 - (a) Quelle est la parité de g ?
 - (b) g est-elle continue sur \mathbb{R} ?
 - (c) Montrer que la série de Fourier de g est convergente. On énoncera le théorème utilisé et on précisera la fonction vers laquelle elle converge.
 - (d) Déduire à l'aide des coefficients de Fourier a_n et b_n de f les coefficients de Fourier a'_n et b'_n de la fonction g .
4.
 - (a) Dans cette sous-question seulement, on suppose $c = 1$. Représenter graphiquement g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

- (b) Calculer $Sf(0) = Sg(0)$ et en déduire l'expression $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^2 + n^2}$.

(c) Calculer $Sg(\pi)$ et en déduire l'expression $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^2 + n^2}$.

5. En appliquant la relation de Parseval à g , calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2 + n^2} \right)^2$.

Exercice 3

On considère la fonction g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8.$$

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne :

$$z = g(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8.$$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Comparer $g(x, y)$ avec $g(x, -y)$, $g(-x, y)$, $g(-x, -y)$. Déduire de chaque égalité trouvée une symétrie de la surface S .

2. On rappelle que $p(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$. Montrer que $p(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - 3)$.

3. On rappelle que $q(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$. Calculer $q(x, y)$.

4. Trouver tous les couples de réels solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 3) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

5. En déduire que la fonction g admet cinq points critiques dont on précisera les coordonnées.

6. Énoncer un théorème permettant de démontrer que $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$. Montrer que la fonction g vérifie les hypothèses de ce théorème.

7. (a) On rappelle que $r(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y)$. Montrer que $r(x, y) = 4(3x^2 + y^2 - 3)$.

(b) On rappelle que $s(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y)$. Calculer $s(x, y)$.

(c) On rappelle que $t(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$. Calculer $t(x, y)$.

8. Calculer r et $rt - s^2$ pour (x, y) valant $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{3}, 0)$. En déduire la nature des points critiques (maximum, minimum ou col) trouvés à la question 5.

Partie B

On se propose de déterminer deux réels positifs α et r tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8 = ((x - \alpha)^2 + y^2 - r^2) ((x + \alpha)^2 + y^2 - r^2) \quad (*).$$

1. Écrire l'égalité (*) avec $(x, y) = (0, 1)$. En déduire la valeur de $\alpha^2 + 1 - r^2$, s'il existe α et r tels que l'égalité (*) soit vraie.
2. Écrire l'égalité (*) avec $(x, y) = (1, 0)$. En déduire en utilisant aussi le résultat de la question 1. de cette partie la valeur des réels positifs α et r , s'il existe α et r tels que l'égalité (*) soit vraie.
3. Pour les valeurs de α et r trouvées dans les cas particuliers $(0, 1)$ et $(1, 0)$, montrer que l'égalité (*) est vraie pour tout couple de réels (x, y) .
4. En déduire que l'ensemble de points vérifiant l'équation $g(x, y) = 0$ est formé de deux cercles dont on donnera les centres, les rayons et les coordonnées des points d'intersection.

Exercice 4

On se donne un tableau à une dimension, de longueur n dont les entrées sont indexées de 1 à n , ne contenant que des 0 et des 1, commençant et se terminant par un 0. On supposera qu'il ne contient pas de 0.

Dans un tel tableau on appelle **séquence1** une suite de 1 consécutifs précédés et suivis d'au moins un 0. Ci-dessous, on a un exemple d'un tel tableau de longueur 16, comportant 4 **séquence1**, dont une de longueur 4 entre les numéros 8 et 11, et une en 15 de longueur 1. On se propose d'écrire des fonctions en métalangage ou en Scilab permettant de calculer le nombre, la longueur et la position de telles **séquence1**.

Index i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Tableau1 (i)	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0

1. Soit la fonction f écrite en Scilab, avec en entrée un tableau t défini précédemment.

```
function nb=f(t)
    nb=0
    n=length(t)
    for i=1:(n-1)
        if t(i)<t(i+1)
            nb=nb+1
        end
    end
end
endfunction
```

Expliquer ce que renvoie $f(\text{Tableau1})$ et préciser le fonctionnement de f .

2. Écrire en métalangage ou en Scilab une fonction g qui détermine et renvoie la position et la longueur [début,fin,longueur] de la plus longue séquence1 du tableau (en cas d'égalité de longueur celle de la première rencontrée). Par exemple $g(\text{Tableau1})$ doit renvoyer la liste [3,6,4].