

Note au candidat

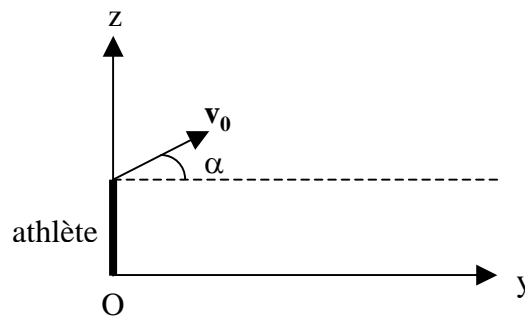
- Les vecteurs sont notés en caractères **gras** dans le texte.
- Le sujet est divisé en 3 problèmes indépendants.
- Il est vivement conseillé au candidat de lire préalablement l'intégralité du sujet.
- Il sera tenu compte de la clarté, de la précision ainsi que de la concision de la rédaction.

**PREMIER PROBLEME**

**LANCER DE POIDS**

Un athlète, de hauteur  $H$  bras levé, lance un poids de masse  $m$  avec une vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$  située dans le plan  $yOz$ , sous l'angle  $\alpha$  par rapport au sol (cf. figure 1).

Le but de ce problème est d'étudier la modélisation d'un lancer puis de déterminer les conditions du « meilleur lancer ».



*Figure 1.*

La surface de la Terre, horizontale et plane, est confondue avec le plan  $(Ox,Oy)$ . Le trièdre orthonormé  $(Ox, Oy, Oz)$  lié au sol terrestre sera supposé galiléen. L'intensité  $g_0$  du champ de pesanteur terrestre est considérée comme constante.

Pour les applications numériques on prendra :  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $H = 2 \text{ m}$ .

**1 Etude du lancer**

On suppose que le poids n'est soumis qu'à la force de pesanteur.

1.1 Déterminer la nature du mouvement du poids selon l'axe  $Oy$ .

1.2 Exprimer, en fonction de  $v_0$ ,  $g_0$  et  $\alpha$ , la durée  $T_S$  nécessaire pour que le poids atteigne le sommet  $S$  de sa trajectoire.

On note  $(y_S, z_S)$  les coordonnées du sommet  $S$  de la trajectoire du poids.

- 1.3 Etablir l'expression de la coordonnée  $y_S$ .
- 1.4 Enoncer le théorème de l'énergie mécanique.
- 1.5 Calculer l'énergie mécanique du poids à l'instant où il quitte la main de l'athlète. On supposera l'énergie potentielle du poids nulle au niveau du sol.
- 1.6 En utilisant les résultats des questions 4 et 5, déterminer l'expression de la coordonnée  $z_S$ .
- 1.7 Retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode.
- 1.8 Application numérique : pour le cas  $\alpha = 30^\circ$ , calculer les valeurs numériques de  $T_S$ ,  $y_S$  et  $z_S$ .

## 2 Détermination du meilleur lancer

On cherche à déterminer l'angle  $\alpha_m$  qui réalise le meilleur lancer pour une vitesse initiale  $v_0$  fixée. On suppose  $\alpha$  compris entre 0 et  $\pi/2$ .

- 2.1 Etablir l'équation du second ordre régissant la coordonnée  $y_C$  du point de chute du poids sur le sol. On mettra cette équation sous la forme :  $A.y_C^2 + B.y_C + C = 0$ , avec  $A = g_0/(2.v_0^2)$ , B et C étant des paramètres ne dépendant que de H et  $\alpha$ .
- 2.2 Etablir l'expression de  $dy_C/d\alpha$  en fonction de  $y_C$ , H,  $\alpha$ ,  $v_0$  et  $g_0$ .
- 2.3 En déduire l'expression du meilleur lancer  $y_C = y_{Cm}$  en fonction de H,  $\sin(\alpha_m)$  et  $\cos(\alpha_m)$ .
- 2.4 Montrer que  $\tan^2(\alpha_m)$  peut se mettre sous la forme :  $\tan^2(\alpha_m) = \frac{1}{1+a.H}$ , où a est une constante ne dépendant que de  $g_0$  et  $v_0$ .
- 2.5 Etablir l'expression de  $y_{Cm}$  en fonction de H,  $g_0$ , et  $v_0$ . On pourra préalablement exprimer  $y_{Cm}$  en fonction de  $\tan(\alpha_m)$  à partir du résultat de la question 2.3, puis utiliser le résultat de la question précédente.
- 2.6 Etudier qualitativement l'influence de la taille de l'athlète sur le meilleur lancer.
- 2.7 Application numérique : calculer  $y_{Cm}$  à partir des données du problème.

## DEUXIEME PROBLEME

### ARC-EN-CIEL

L'objectif de ce problème est d'expliquer le phénomène de l'arc-en-ciel qui a lieu dans les conditions grossièrement décrites par la figure 2 ci-dessous.

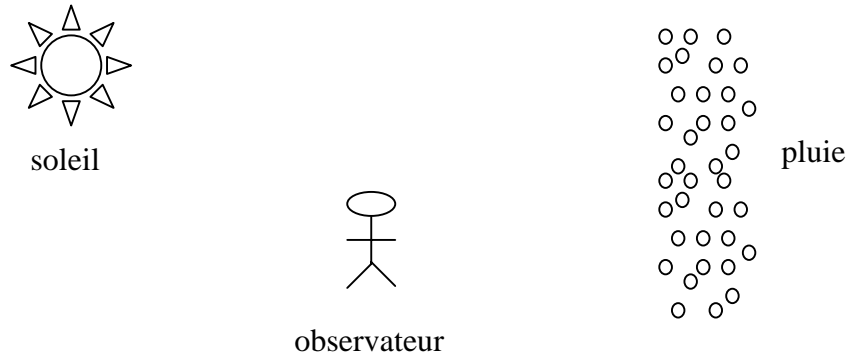


Figure 2.

### 3 Question préliminaire

3.1 Dans quelle direction regarde l'observateur pour apercevoir l'arc-en-ciel ?

### 4 Modélisation

Dans un premier temps, on s'intéresse au parcours des rayons du soleil dans une goutte d'eau modélisée par une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , qu'on supposera immobile dans l'air. Cette goutte est éclairée par un faisceau de lumière parallèle dont un rayon  $x'A$  atteint la sphère en  $A$  où il se réfracte. On pose  $(\vec{OA}, \vec{Ax}') = i$  et  $(\vec{AO}, \vec{AB}) = r$ , les angles d'incidence et de réfraction (cf. figure 3).

Soit  $B$  le point où le rayon réfracté rencontre la sphère. En  $B$  la lumière peut être soit réfractée soit réfléchi, mais on ne considère ici que le rayon réfléchi. Le rayon réfléchi en  $B$  rencontre de nouveau la sphère en  $C$  où il se réfracte selon  $Cy$ . On note  $\alpha = (\vec{OX'}, \vec{Cy})$ .

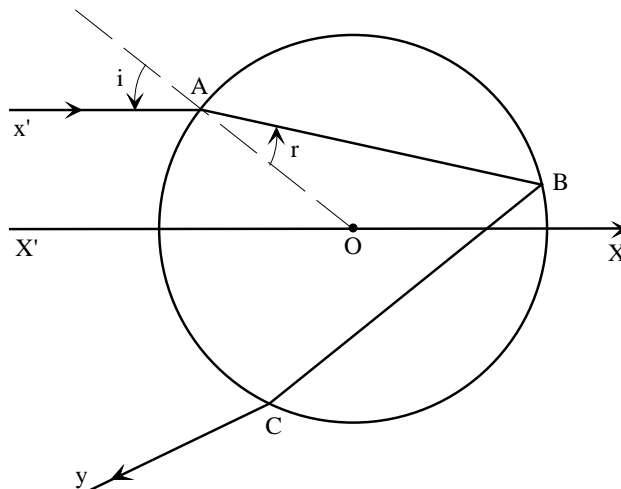


Figure 3.

On note  $n$  l'indice de réfraction de la goutte.

Dans un premier temps, on suppose que la lumière incidente est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

Dans les questions qui suivent, on analyse la pertinence du modèle proposé. Les réponses aux questions se doivent d'être claires et concises.

- 4.1 Donner un ordre de grandeur de  $\lambda$ .
- 4.2 Etablir une approximation portant sur  $R$  et  $\lambda$  à partir de laquelle on peut négliger le phénomène de diffraction et ainsi assimiler la lumière traversant la goutte à des rayons lumineux (hypothèse de l'optique géométrique).  
Cette approximation vous semble-t-elle valable dans le cas présent ?

## 5 Etude quantitative avec $n$ constant

Le modèle étant supposé pertinent, on se propose maintenant de quantifier le phénomène de l'arc-en-ciel. On commence par supposer  $n$  constant et on cherche à analyser les conséquences des variations de  $i$ .

- 5.1 A quelle condition sur l'angle  $r$  existe-t-il dans la goutte une réflexion totale en B ?
- 5.2 Déterminer l'expression de  $\alpha$  en fonction des angles  $r$  et  $i$ .
- 5.3 Etablir l'expression de la dérivée partielle  $\partial\alpha/\partial i$  en fonction de  $\partial r/\partial i$ .
- 5.4 En déduire la valeur numérique de  $\partial r/\partial i = (\partial r/\partial i)_E$  pour laquelle  $\alpha$  est extremum.

Dans la suite du problème, on admettra que l'intensité lumineuse réfléchie par la goutte est maximale lorsque  $\alpha$  passe par son extremum.

- 5.5 A partir d'une des lois de Descartes, déterminer l'expression de  $\partial r/\partial i$  en fonction  $i$ ,  $n$  et  $r$ .
- 5.6 Etablir l'expression de  $\cos(i_E)$ , où  $i_E$  est la valeur de  $i$  pour laquelle  $\alpha$  est extremum.
- 5.7 Etablir l'expression de  $\cos(r_E)$ , où  $r_E$  est la valeur de  $r$  pour laquelle  $\alpha$  est extremum.
- 5.8 En déduire l'expression de l'extremum de  $\alpha$ ,  $\alpha_E$ , en fonction de  $n$ .

## 6 Rôle du phénomène de dispersion

En fait l'indice de réfraction  $n$  dépend de la longueur d'onde de la lumière incidente (phénomène de dispersion). Dans le rouge,  $n = n_{\text{rouge}} = 1,331$  et dans le violet,  $n = n_{\text{violet}} = 1,337$ .

- 6.1 Indiquer la position des longueurs d'onde du rouge et du violet dans le spectre visible.
- 6.2 Donner un autre exemple de milieu dispersif.

- 6.3 Calculer les valeurs numériques de  $\alpha_E$  lorsque  $n = n_{\text{rouge}}$  et  $n = n_{\text{violet}}$ .
- 6.4 La partie extérieure d'un arc-en-ciel est-elle rouge ou violette ?
- 6.5 En raisonnant sur les symétries du problème, expliquer la forme en arc de cercle d'un arc-en-ciel.  
Faire un schéma s'inspirant de la figure 4 décrivant le phénomène de l'arc-en-ciel.

Dans certaines conditions, l'observateur peut discerner deux arcs-en-ciel l'un au dessus l'autre.

- 6.6 Expliquer ce phénomène.

## TROISIEME PROBLEME

### MODELISATION D'UN BOBINAGE

Dans ce problème, on cherche à modéliser un bobinage électrique dans le but de déterminer les valeurs des paramètres du modèle qui permettent à ce bobinage de fournir un champ magnétique d'environ 1 Tesla.

Le bobinage est assimilable au solénoïde épais représenté sur la figure 4.

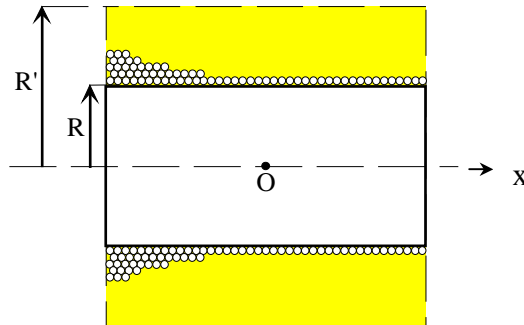


Figure 4.

On donne :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

### 7 Spire circulaire

Dans un premier temps on s'intéresse à une spire circulaire, de centre O et d'axe Ox. Cette spire de rayon R, est contenue dans le plan Oyz orthogonal à son axe Ox. Elle est parcourue par un courant d'intensité constante I.

- 7.1 En raisonnant sur les symétries du problème et en choisissant un sens de parcours du courant dans la spire, déterminer la direction du champ magnétique  $\mathbf{B}_{SP}(\mathbf{O})$  créé au centre de la spire.
- 7.2 Représenter l'allure des lignes du champ magnétique créées par la spire.
- 7.3 Enoncer la loi de Biot-Savart.
- 7.4 Déterminer l'intensité  $B_{SP}(\mathbf{O})$  du champ magnétique au centre de la spire.
- 7.5 Application numérique : on fixe  $R = 5 \text{ cm}$ . Calculer la valeur de I pour avoir  $B_{SP}(\mathbf{O}) = 1 \text{ T}$ . Conclusion ?
- 7.6 En raisonnant sur les symétries du problème et en choisissant un sens de parcours du courant dans la spire, déterminer la direction et l'intensité du champ magnétique  $\mathbf{B}_{SP}(\mathbf{M})$  créé par cette spire en un point M de l'axe Ox.  
On exprimera  $B_{SP}(\mathbf{M})$  en fonction de l'angle  $\theta$  sous lequel est vu le rayon R depuis le point M.

## 8 Solénoïde

On considère maintenant un solénoïde de longueur  $L$ , formé de  $N$  spires jointives identiques de rayon  $R$  parcourues par l'intensité  $I$ . On note  $n$  le nombre de spires par unité de longueur.

- 8.1 Déterminer le champ élémentaire  $dB_{SO}(M)$  créé en un point  $M$  de l'axe du solénoïde par une tranche élémentaire de  $n \cdot dx$  spires jointives en fonction de l'angle  $\theta$  sous lequel est vu cette tranche depuis le point  $M$ .
- 8.2 En déduire l'expression de  $B_{SO}(M)$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $n$  et des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sous lesquels on voit les deux faces du solénoïde depuis le point  $M$ .
- 8.3 Exprimer le champ magnétique  $B_{SO}(O)$  au centre du solénoïde en fonction de  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $n$ ,  $L$  et  $R$ .

## 9 Solénoïde épais

On superpose maintenant plusieurs couches de spires qu'on pourra considérer comme des solénoïdes jointifs ayant même nombre  $n$  de spires par unité de longueur, coaxiaux, de rayon  $r$  variant de  $R$  à  $R'$  (cf. figure 4). Toutes ces spires sont parcourues par le même courant  $I$  circulant dans le même sens. On note  $n'$  le nombre de solénoïdes par unité d'épaisseur.

- 9.1 Exprimer le champ élémentaire  $dB_S(O)$  créé au centre  $O$  par les couches comprises entre  $r$  et  $r + dr$ .
- 9.2 En déduire le champ magnétique  $B_S(O)$  créé en  $O$ .  
On rappelle que 
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left( \frac{x_2 + \sqrt{1+x_2^2}}{x_1 + \sqrt{1+x_1^2}} \right).$$
- 9.3 Avec  $L = 2 R' = 4 R$ , montrer que  $B_S(O) \approx 0,2 \mu_0 n n' L I$ .
- 9.4 Application numérique : on souhaite obtenir en  $O$  un champ de 1 Tesla avec  $I = 30$  A et  $L = 10$  cm. Calculer le nombre total  $N'$  de spires puis la longueur totale du fil nécessaire.

\*\*\*\*\*Fin de l'épreuve\*\*\*\*\*