

Note au candidat

L'usage de toute **calculatrice** est **interdit**. Les applications numériques demandées peuvent être traitées à la main.

Les deux problèmes qui constituent l'épreuve sont indépendants. Le premier est à dominante électrostatique avec une dernière partie axée sur la thermodynamique. Le second traite de mécanique. Les quatre parties de chaque problème sont largement indépendantes entre elles.

La numérotation des questions devra être portée sur les copies et scrupuleusement respectée.

Il sera tenu compte de la **présentation** et de la **rigueur dans les expressions mathématiques**.

PREMIER PROBLEME

ETUDE DE QUELQUES ASPECTS

D'UNE CENTRALE NUCLEAIRE

On se propose d'étudier dans ce problème deux aspects d'une centrale nucléaire : le mécanisme de production d'énergie par fission de noyaux fissiles, le bilan énergétique de l'installation et ses conséquences thermiques sur l'environnement.

Dans le mécanisme de fission nucléaire, un neutron possédant une énergie cinétique réduite vient heurter le noyau d'un élément fissile, en l'occurrence un noyau d'uranium 235 (^{235}U). Sous le choc, ce noyau se décompose en noyaux plus légers en libérant de l'énergie, ainsi qu'un ou deux neutrons nécessaires à la poursuite de la réaction en chaîne.

Dans le modèle développé ci-après, l'énergie de fission trouve son origine dans la différence d'énergie potentielle électrostatique entre le noyau initial et les noyaux fils engendrés. Selon le modèle dit de la goutte d'eau, nous assimilerons le noyau de ^{235}U à une boule de rayon a et de charge Q , uniformément chargée à la densité volumique ρ .

On admet que la permittivité à l'intérieur, comme à l'extérieur du noyau, s'identifie avec la valeur ϵ_0 dans le vide. On note $-e$ la charge de l'électron.

I - Champ, potentiel et énergie électrostatiques associés à une boule chargée

- A.1.1.** a. Que vaut la charge totale Q portée par le noyau de ^{235}U ?
b. Exprimer ρ , sa charge volumique, en fonction de Q et a .
- A.1.2.** Que vaut la charge $q(r)$ contenue dans une sphère de rayon $r \leq a$ prise au sein du noyau.
- A.1.3.** En utilisant le théorème de Gauss, déterminer, figure à l'appui, l'expression du champ électrostatique $E(r)$ à la distance r du centre du noyau, pour r compris entre 0 et l'infini.
- A.1.4.** Déterminer l'expression du potentiel électrostatique $V(r)$ à la distance r du centre du noyau, pour r compris entre 0 et l'infini. – On considère que $V = 0$ à l'infini –.

A.1.5. Rappeler l'expression générale de la densité volumique d'énergie électrostatique w , en fonction de la valeur locale du champ électrique, E , et de la permittivité ϵ du milieu.

A.1.6. Dédurre, de l'expression du champ électrique établie en A.1.3, l'expression de l'énergie potentielle électrostatique U_e associée au noyau de ^{235}U . – On exprimera U_e en fonction des seuls paramètres Q et a .

II - Travail des forces électrostatiques lors de la construction d'une boule chargée

On admet dans ce qui suit que le noyau est construit par adjonctions successives de couches sphériques de même charge volumique. A la surface du noyau de rayon r en cours de construction, où règne le potentiel $V^*(r)$, est appliquée une couche d'épaisseur dr , supposée prise à l'infini, à potentiel nul.

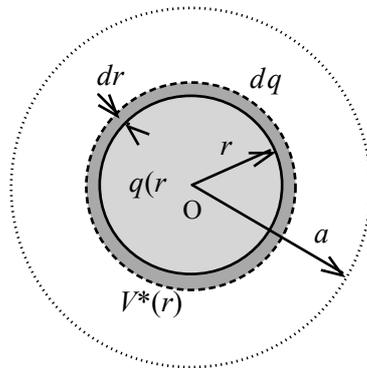


Figure 1 : Noyau en cours de construction

A.2.1. Soit une charge ponctuelle q se déplaçant d'un point A à un point B dans un champ électrique extérieur E .

- Exprimer le travail W_q exercé par la force électrostatique agissant sur la charge q au cours du déplacement AB.
- Relier W_q à la variation de potentiel, $V_B - V_A$, subie par la charge au cours du déplacement.

On montre, à l'aide du théorème de Gauss, que le champ et le potentiel électrostatiques observés à l'extérieur d'une boule portant une charge q uniformément distribuée, sont identiques à ceux produits par une charge ponctuelle rassemblant toute la charge q au centre de ladite boule.

A.2.2. Rappeler l'expression du champ E et du potentiel électrostatique $V(r)$ à la distance r d'une charge ponctuelle q située dans le vide.

A.2.3. Après avoir défini sa charge, exprimer $V^*(r)$, le potentiel à la surface du noyau de rayon r en cours de construction, en fonction de Q , r et a .

A.2.4. Exprimer $dq(r)$, la charge élémentaire contenue dans la couche sphérique $[r, r+dr]$, en fonction de Q , a , r et dr .

A.2.5. Exprimer dW , le travail des forces électrostatiques s'exerçant sur la couche $[r, r+dr]$ durant son déplacement entre sa position initiale à l'infini (où $V = 0$) et la surface du noyau en cours de construction (rayon r). Préciser si ce travail est positif ou négatif.

A.2.6. Exprimer le travail W exercé par les forces électrostatiques à l'occasion de la construction du noyau dans sa totalité. – On exprimera W en fonction des seuls paramètres Q et a .
Quel lien existe-t-il entre le travail W et l'énergie électrostatique U_e calculée en A.1.6 ?

III - Energie libérée lors de la fission d'un noyau

En supposant qu'un seul neutron est éjecté (en plus du neutron incident) lors de la fission, nous considérerons ici pour simplifier que la brisure du noyau de ^{235}U produit deux noyaux fils identiques, de la forme aZ . Outre l'énergie cinétique, négligeable, communiquée par le neutron incident, la brisure du noyau requiert une énergie U_{coh} égale à 130 MeV. Cette énergie, prélevée sur la réaction de fission elle-même, sert à vaincre les forces d'attraction entre nucléons responsables de la cohésion du noyau. On indique que l'énergie potentielle d'un noyau est proportionnelle à son rapport Q^2/a .

A.3.1. Préciser les valeurs des nombres A et Z relatifs aux noyaux fils aZ .

A.3.2. En supposant que les particules qui composent les noyaux se comportent comme un fluide et en appliquant la règle de proportionnalité adéquate, relier a' , le rayon des noyaux fils, au rayon a du noyau initial de ^{235}U . – On négligera ici l'absence du neutron éjecté –.

A.3.3. Relier de même U_e' , l'énergie potentielle d'un noyau fils, à l'énergie U_e du noyau de ^{235}U sous la forme : $U_e' = U_e \square 2^p$, où l'on précisera la valeur de l'exposant fractionnaire p .

A.3.4. Exprimer U_f , l'énergie utilisable récupérée lors de la fission d'un noyau de ^{235}U .

A.3.5. A.N. Calculer U_f en électron-volt, sachant que $U_e = 810$ MeV et que $2^{p/3} \square 2/3$.

IV - Bilan énergétique et impact thermique sur l'environnement

Un réacteur nucléaire constitue la chaudière, à température T_C , d'une turbine à vapeur. La turbine est également en liaison avec un condenseur à température T_F ($T_F < T_C$).

La turbine reçoit du réacteur nucléaire une énergie calorifique, q_C , égale à 1680 MJ par seconde. On note w le travail mécanique fourni chaque seconde par la turbine à sa charge, et q_F la chaleur échangée chaque seconde par la turbine avec le condenseur.

On considère que l'installation fonctionne de façon réversible.

A.4.1. a. Représenter le schéma de l'installation en indiquant le sens effectif des échanges.
b. Expliquer le rôle joué par le condenseur. Justifier sa présence d'un point de vue théorique.

A.4.2. Exprimer le bilan énergétique de la turbine par unité de temps.

A.4.3. Définir s_C et s_F , les entropies échangées par seconde par la turbine, respectivement avec la chaudière nucléaire et avec le condenseur. De quel signe sont ces quantités ?

A.4.4. La turbine fonctionnant de façon réversible, exprimer son bilan entropique par unité de temps.
Que vaut s^p , l'entropie créée (ou produite) par unité de temps au sein de l'installation ?

A.4.5. En associant les deux bilans précédents, donner
a. une relation liant q_F à q_C et au rapport T_F/T_C .
b. une relation liant w à q_C et au rapport T_F/T_C .

A.4.6. La chaleur récupérée par le condenseur est entièrement évacuée vers une rivière. Déterminer l'élévation de température $\square T$ de la rivière, sachant que celle-ci s'écoule avec un débit de ν mètres-cube par seconde. – On notera c la capacité calorifique massique de l'eau et ρ_0 sa masse volumique –.

A.4.7. A.N. Calculer q_F et $\square T$, pour $q_C = 1680$ MW, $t_C = 307$ °C, $t_F = 17$ °C et $\nu = 50$ m³/s.
On donne la capacité calorifique massique de l'eau : $c \square 4,2$ J·g⁻¹·K⁻¹.

SECOND PROBLEME

ETUDE D'UNE USINE MAREMOTRICE

Une usine marémotrice est un barrage muni de turboalternateurs qui exploite le mouvement des marées, – plus précisément, la différence de hauteur d'eau entre marée haute et marée basse, le fonctionnement étant possible dans les deux sens –, pour produire de l'énergie électrique. En France, une usine de ce type est installée dans l'estuaire de la Rance (Bretagne).

En considérant que les marées trouvent leur origine dans le seul mouvement relatif Terre/Lune, nous nous proposons, dans le cadre de ce problème, d'examiner les conséquences du fonctionnement de l'usine marémotrice sur le mouvement du couple Terre-Lune. Pour cela, nous négligerons toute force de viscosité dont les océans sont le siège, et ne prendrons en compte que le phénomène d'amortissement des marées induit par le fonctionnement du barrage-usine étudié.

Pour le système Terre-Lune, le fonctionnement du barrage-usine se traduit par la présence d'un couple de freinage interne qui agit conjointement sur la rotation terrestre et sur le mouvement orbitale lunaire. Au plan énergétique, ce freinage s'accompagne de l'absorption d'une puissance mécanique P , directement prélevée au système Terre-Lune. C'est cette puissance qui est, au rendement de l'installation près, convertie sous forme électrique par les turboalternateurs.

I - Accouplement de deux disques en rotation relative

On considère dans un premier temps le problème suivant, qui, bien que plus simple, met en oeuvre un raisonnement assez proche.

Soit deux disques identiques : même masse m et moment d'inertie J , montés l'un au-dessus de l'autre sur un axe vertical Δ (figure 2). Par rapport à un repère galiléen lié au laboratoire, le disque inférieur (disque 1) tourne sur son inertie autour de l'axe Δ à la vitesse angulaire ω_1 . Le disque supérieur (disque 2) est quant à lui immobile, suspendu à faible distance du premier, hors contact.

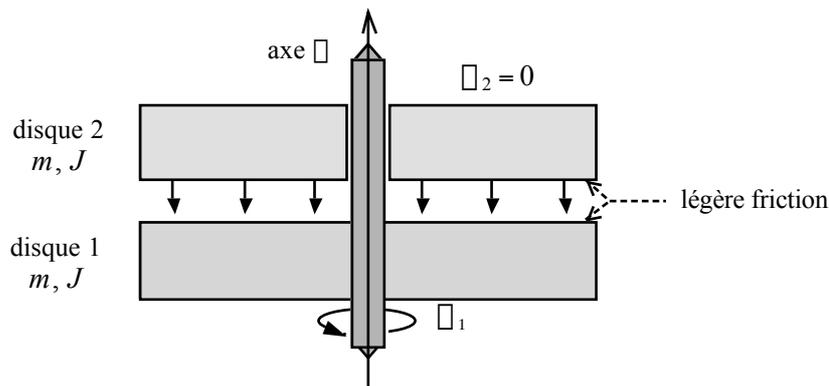


Figure 2 : Situation avant

Les faces des disques présentant une légère friction, on laisse tomber le disque supérieur au repos sur le disque inférieur en rotation. Après un régime transitoire, les deux disques tournent à la vitesse commune $\omega \neq \omega_1$. – On négligera ici les éventuels frottements rencontrés au niveau de l'axe Δ , de même que l'inertie propre de ce dernier –.

B.1.1. Avant contact, exprimer pour le disque 1 en rotation :

- ω_1 , son moment cinétique par rapport à l'axe Δ ;
- E_1 , son énergie cinétique.

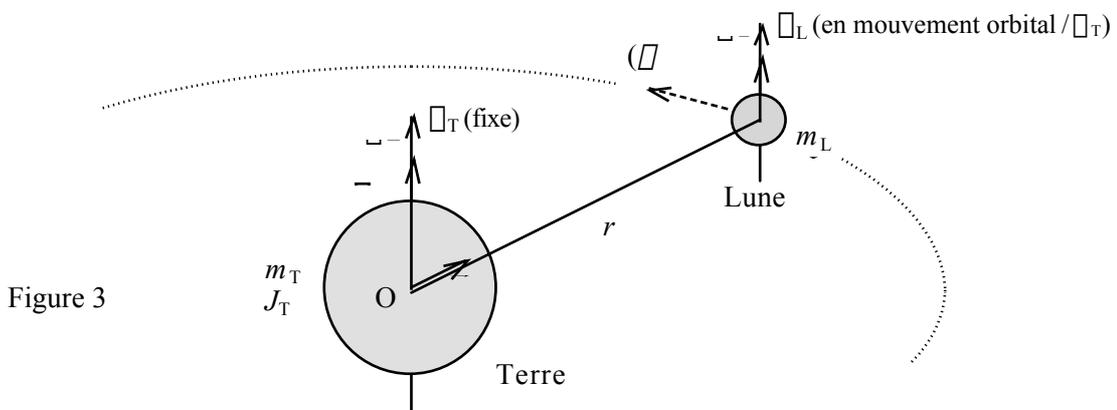
- B.1.2.** Après contact, exprimer pour l'ensemble des disques 1 et 2 tournant à vitesse ω :
- L , le moment cinétique par rapport à l'axe Δ ;
 - E , l'énergie cinétique.
- B.1.3.** En invoquant le principe de conservation du moment cinétique et/ou celui de conservation de l'énergie cinétique, relier la vitesse finale ω à la vitesse initiale ω_1 du disque 1.
- B.1.4.** Comment expliquer la variation d'énergie cinétique du système entre les deux états ?
- B.1.5.** Que devient l'expression de la vitesse finale ω , si les deux disques sont de moments d'inertie différents : $J_2 \neq J_1$, et si le disque 2 possède une vitesse initiale ω_2 (de même signe que ω_1) ?

II - Caractéristiques du mouvement Terre-Lune

On revient au problème principal de l'usine marémotrice et de son action sur le mouvement Terre-Lune.

La Terre et la Lune sont assimilées à des boules homogènes, de masse et de moment d'inertie par rapport à leur axe respectivement notés : m_T, J_T et m_L, J_L . Dans un repère galiléen centré sur le Soleil, leur mouvement est décrit de la façon suivante (figure 3) :

- La Terre est animée d'un unique mouvement de rotation sur elle-même autour d'un axe fixe, Δ_T , à la vitesse angulaire ω_T (période ≈ 24 h). – On ne considère pas ici la révolution autour du Soleil –.
- La Lune est animée d'un double mouvement : d'une part une rotation sur elle-même à la vitesse ω_L (période ≈ 27 jours), autour d'un axe Δ_L parallèle à Δ_T ; d'autre part, un mouvement orbital autour de l'axe terrestre Δ_T , sur une trajectoire circulaire de rayon r , perpendiculaire à Δ_T , et parcourue à la vitesse angulaire ω (période ≈ 27 jours) dans le même sens que ω_T .



Dans la suite, nous admettrons que la vitesse de rotation de la Lune sur elle-même, ω_L , reste constante. Nous pourrions en conséquence ignorer l'énergie cinétique associée à ce mouvement qui reste elle-même constante, et assimiler la Lune à une masse ponctuelle animée du seul mouvement orbital à la vitesse ω .

- B.2.1.** Exprimer la force de gravitation s'exerçant sur la Lune. – On notera G la constante de gravitation universelle –.
- B.2.2.** Ecrire l'équation qui traduit l'équilibre dynamique de la Lune dans son mouvement orbital autour de la Terre (équilibre entre force de gravitation et force centrifuge).
En déduire une relation liant le cube du rayon orbital, r , au carré de la vitesse de révolution, ω .
- B.2.3.** Pour la Terre dans son mouvement de rotation sur elle-même, exprimer :
- L_T , son moment cinétique par rapport à l'axe Δ_T ;
 - E_T , son énergie cinétique de rotation.

- B.2.4.** Pour la Lune dans son mouvement orbital, exprimer en fonction de $\dot{\varphi}$:
- L_L , son moment cinétique orbital par rapport à l'axe $\hat{\varphi}$;
 - E_L , son énergie cinétique orbitale.
- B.2.5.** On donne l'expression de E_G , l'énergie potentielle associée au couple Terre-Lune : $E_G = -\frac{GMm}{r}$
- Vérifier la relation : $E_G = 2 E_L$.
 - Exprimer E_M , l'énergie mécanique totale associée au système Terre-Lune (la Lune étant assimilée à une masse ponctuelle).

III - Conséquence du barrage-usine sur le mouvement Terre-Lune

Si la vitesse de rotation lunaire, $\dot{\varphi}_L$, reste constante, les vitesses $\dot{\varphi}_T$ et $\dot{\varphi}$, de même que la distance Terre-Lune r , sont quant à elles fonctions du temps.

On désigne par $\dot{\varphi}_T, \dot{\varphi}, \dots$ les dérivées par rapport au temps de $\varphi_T, \varphi, \dots$

- B.3.1.** Justifier par des arguments physiques l'hypothèse d'une vitesse de rotation lunaire constante.
- B.3.2.** Appliquer le théorème du moment cinétique au système Terre-Lune.
En déduire une relation de la forme : $J_T \dot{\varphi}_T + m_L f(\dot{\varphi}, r, \dots) = 0$.
- B.3.3.** En appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique au système Terre-Lune, relier la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique du système à la puissance P absorbée par le barrage-usine.
En déduire une seconde relation de la forme : $J_T \dot{\varphi}_T + m_L g(\dot{\varphi}, r, \dots) = \dot{E}$, avec $P > 0$.
- B.3.4.** On se propose d'éliminer les variables $\dot{\varphi}_T$ et $\dot{\varphi}$ entre les trois équations : B.2.2, B.3.2 et B.3.3, afin d'établir une relation liant \dot{E} à φ_T, φ et P , sous la forme : $\dot{E} = kP / (\varphi_T \varphi)$. Pour cela :
- Tirer de la relation établie en B.2.2 une égalité de la forme : $\dot{\varphi}_T = \frac{p \dot{\varphi}}{q \varphi}$, où l'on précisera les entiers naturels p et q (on pourra faire appel à la notion de dérivée logarithmique).
 - En factorisant r^2 dans les fonctions f et g des équations B.3.2 et B.3.3 et en y reportant l'égalité ci-dessus, mettre ces équations respectivement sous la forme :

$$J_T \dot{\varphi}_T + m_L f(\dot{\varphi}, r, \dots) = 0 \quad \text{et} \quad J_T \dot{\varphi}_T + m_L g(\dot{\varphi}, r, \dots) = \dot{E}$$
 - Etablir la relation $\dot{E} = f(\varphi_T, \varphi, P)$ recherchée et identifier la constante k .

Compte tenu de la fréquence des marées, égale à $(\dot{\varphi}_T \varphi) / \dot{\varphi}$, le barrage-usine absorbe une puissance moyenne $\dot{E} = 2 \dot{E} (\dot{\varphi}_T \varphi) / \dot{\varphi}$, où \dot{E} est l'énergie potentielle moyenne stockée par le barrage à chaque étale (qui sera évaluée dans la 4^{ème} partie).

On note $T = 2\pi / \dot{\varphi}_T$ la durée du jour terrestre, et a celle de l'année.

- B.3.5.** Exprimer $\dot{E} T$, la variation au 1^{er} ordre de la durée du jour terrestre constatée au cours d'une année.
La variation observée va-t-elle dans le sens attendu ? Expliquer.
(On rappelle que, du fait de la relation qui les lie, on a : $\dot{\varphi} / \dot{\varphi}_T = \dots$).
- B.3.6.** A.N. Evaluer numériquement $\dot{E} T$, la variation de durée du jour terrestre sur une année.
On donne : $\dot{E} = 10^{13}$ J, $J_T \approx 10^{38}$ kg·m², $T^2 \approx 4\pi^2 / \dot{\varphi}_T^2 \approx 10^{10}$ s² et $a \approx 365 \times 24 \times 3600 \approx 10^7$ s.

IV - Energie potentielle stockée par le barrage-usine

On s'intéresse à l'énergie stockée sous forme d'énergie potentielle gravitationnelle par le barrage-usine. Le lit de la rivière ayant un profil en V aplati, la superficie du bief amont varie avec la cote z selon la loi linéaire : $S(z) = S_0 (1 + \alpha z)$, avec $\alpha > 0$.

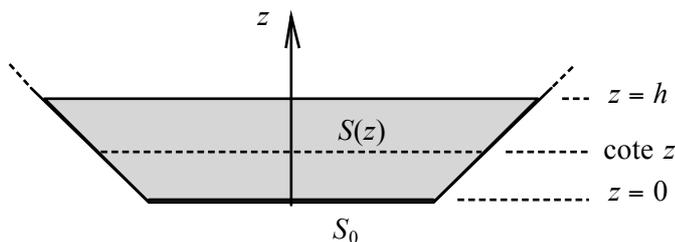


Figure 4 : Aire du bief amont en fonction de la cote

On note ρ la masse volumique de l'eau et g la gravitation terrestre.

• **1^{er} cas : marée basse**

L'eau dans le bief amont atteint la cote h . Le bief aval (côté mer) est hors d'eau. La cote $z = 0$ est prise comme origine des énergies potentielles.

B.4.1. Exprimer $V(h)$, le volume d'eau retenu dans le bief amont en fonction de la hauteur d'eau h .

B.4.2. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle E_p d'une masse m ponctuelle située à la cote z .

B.4.3. Quelle est l'énergie potentielle $dE_p(z)$ stockée dans la couche d'eau d'épaisseur dz située à la cote z ?

B.4.4. Exprimer $E_p(h)$, l'énergie potentielle stockée dans le bief amont lorsque celui-ci est rempli à la hauteur h ?

• **2^{ème} cas : marée haute**

La situation est maintenant inversée : le bief amont est vide et l'eau dans le bief aval (côté mer) se maintient à la hauteur h .

B.4.5. En adaptant à la nouvelle configuration le raisonnement précédent, établir l'expression de l'énergie potentielle E_p' du bief aval par rapport au bief amont. A-t-on l'égalité : $E_p' = E_p$?

ooooooo