

# Mathématiques

**Durée : 3 heures.- Coefficient : 3**

**Les trois problèmes sont indépendants et doivent être traités.**

**La calculatrice personnelle est interdite.**

## **Problème 1**

On considère la fonction  $f: [0, \pi]^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \frac{x(\pi - y)}{2} \text{ si } 0 \leq x \leq y \leq \pi \text{ et } f(x, y) = \frac{y(\pi - x)}{2} \text{ si } 0 \leq y \leq x \leq \pi$$

### **Partie A**

À Préciser la valeur de  $f$  sur les bords du carré  $[0, \pi]^2$

• Montrer que  $f(x, y) = f(y, x)$  sur  $[0, \pi]^2$

• Calculer l'intégrale double  $\int_{[0, \pi]^2} f(x, y) dx dy$

• À toute fonction continue  $\psi: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ , on associe la fonction  $u$  définie par:

$$u(x) = \int_0^x f(x, y)\psi(y)dy = \frac{(\pi - x)}{2} \int_0^x \psi(y)dy + \frac{x}{2} \int_x^\pi (\pi - y)\psi(y)dy.$$

a) Montrer que  $u$  est deux fois dérivable et calculer  $u'(x)$  et  $u''(x)$

b) Montrer que  $u$  est solution de l'équation différentielle

$$-\frac{2}{\pi} u''(x) = \psi(x) \text{ avec } u(0) = 0 \text{ et } u(\pi) = 0$$

c) Dans le cas où  $\psi(x) = \sin(nx)$  avec  $n$  entier strictement positif, donner l'expression de  $u$  sous forme d'une intégrale et donner la solution de l'équation différentielle du ^ b)

### **Partie B**

Pour  $y \in ]0, \pi[$  on définit une fonction  $\varphi_y$  sur  $\mathbf{R}$ , 2-périodique et impaire telle que:

$$x \in [0, \pi], \varphi_y(x) = f(x, y)$$

À Pour  $y \in ]0, \pi[$  donné, déterminer le développement en série de Fourier de  $\varphi_y$ .

[ On peut soit faire le calcul direct, soit utiliser le résultat du ^ c) ]

• Pour  $(x, y) \in ]0, \pi[^2$ , en déduire une expression simple de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\sin(ny)}{n^2}$  et de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$$

• a) À l'aide de la question précédente, calculer la somme  $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

b) On pose  $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$  et  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S + S$ . Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de  $S$ .

^ a) Calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ny)}{n^4}$ , et en déduire la somme  $T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$

b) On pose  $T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4}$  et  $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = T + T$ . Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de  $T$ .

## Problème 2

On associe à tout polynôme  $P$  à coefficients réels le polynôme  $L(P)$  défini par

$$L(P)(x) = -xP'(x) + (x-1)P(x)$$

À Soit  $E = \mathbf{R}_3[x]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. Montrer que  $L$  est un endomorphisme de  $E$  et déterminer sa matrice  $\mathbf{M}$  dans la base canonique de  $E$ :  $B_1 = (T_0, T_1, T_2, T_3)$  avec  $T_k : x \mapsto x^k$

^ Déterminez la dimension du noyau et la dimension de l'image de  $L$ .

^ Diagonalisez la matrice  $\mathbf{M}$ , (on notera  $\lambda_k$ , pour  $0 \leq k \leq 3$ , les valeurs propres de  $\mathbf{M}$  rangées dans l'ordre croissant, et donc aussi valeurs propres de  $L$ ). Déduisez-en la suite de polynômes  $P_k(x)$  unitaires de degrés  $k$  (ayant 1 pour coefficient du terme de degré  $k$ ) telle que  $L(P_k) = \lambda_k P_k$ . Montrez que  $B_2 = (P_0, P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $E$ .

^ On s'intéresse maintenant à la recherche de solutions polynomiales  $P$  de l'équation

$$L(P) - \lambda P = Q \quad \text{avec } \lambda \in \mathbf{R} \text{ et } Q \in E \text{ fixés} \quad (*)$$

a) On décompose  $Q = \sum_{k=0}^{k=3} a_k P_k$ , et on recherche  $P$  sous la forme  $P = \sum_{k=0}^{k=3} b_k P_k$ .

Établir les relations entre les coefficients  $(a_k)_{0 \leq k \leq 3}$  et  $(b_k)_{0 \leq k \leq 3}$

b) Montrer que si  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $\mathbf{M}$ , il existe une solution unique pour tout  $Q$ , et donner le développement de cette solution dans la base  $B_2$  en fonction de  $(a_k)_{0 \leq k \leq 3}$

c) Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $L$  ( $\lambda = \lambda_k$ , avec  $0 \leq k \leq 3$ ), quelle condition doit vérifier  $Q$  pour qu'il existe une solution ? Déterminer alors toutes les solutions de (\*) par leur développement dans la base  $B_2$ .

d) On prend  $\lambda = \lambda_2$ ,  $Q(x) = -28 + 118x - 63x^2 + 7x^3$ . Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation  $L(P) - \lambda_2 P = Q$  telle que  $P(0) = 0$ . Déterminer cette solution sous

la forme  $P = \sum_{k=0}^{k=3} b_k P_k$  en calculant les  $(b_k)_{0 \leq k \leq 3}$

~ Montrez que  $P_3$  possède 3 racines réelles distinctes dans l'intervalle  $]0, +\infty[$ , dont une dans l'intervalle  $]0, 1[$  et une dans l'intervalle  $]3, +\infty[$

### Problème 3

Soit un plan  $P$  muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On note  $\ell_0$  la droite d'équation  $y = 0$ ,  $I$  le point de coordonnées  $(0, 1)$  et  $J$  le point de coordonnées  $(0, -1)$ .

Dans ce problème, si  $E$  est un ensemble de points du plan, on note  $E^* = E \setminus (E \cap \ell_0)$ , c'est à dire  $E$  privé de son intersection avec  $\ell_0$ .

#### Partie A

À Soit  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  avec  $y \neq 0$  et  $y \neq 1$ . La droite  $(IM)$  coupe  $\ell_0$  en  $\ell$  de coordonnées  $(x, 0)$ . Calculer  $x$  en fonction de  $(x, y)$

· Soit  $r = \frac{\overline{I\ell}}{\overline{M\ell}}$  Montrer que les coordonnées du point  $M$  tel que:  $\overrightarrow{IM} = r \overrightarrow{IJ}$  vérifient

$$\begin{cases} x = \frac{-x}{y} \\ y = \frac{-1}{y} \end{cases} \quad (1)$$

· Pour  $M(x, y)$  avec  $y \neq 0$  la relation (1) définit une application  $f$  de  $P^* = P \setminus \ell_0$  vers  $P^*$ , même si  $y = 1$ . Montrer que cette application est bijective et donner l'expression de sa bijection réciproque.

^ Soit  $D$  une droite distincte de  $\ell_0$  ayant pour équation cartésienne  $ax + by = c$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ . L'image de  $D^*$  par  $f$ , notée  $D^*$ , est une droite  $D$  privée éventuellement d'un point. Donner une équation cartésienne de  $D^*$  à l'aide de  $(a, b, c)$ .

~ Soient deux droites  $D_1$  et  $D_2$  toutes deux non parallèles à  $\ell_0$  et strictement parallèles entre elles. Les images de  $D_1^*$  et  $D_2^*$  sont incluses dans les droites  $D_1$  et  $D_2$ . Quelle particularité présente l'intersection de  $D_1$  et  $D_2$  ?

- De même soient deux droites  $D_1$  et  $D_2$  (toutes deux distinctes de  $\ell_0$ ) sécantes et dont l'intersection appartient à  $\ell_0$ . Les images de  $D_1^*$  et  $D_2^*$  sont incluses dans les droites  $D_1$  et  $D_2$ . Quelle particularité géométrique présentent  $D_1$  et  $D_2$  ?

#### Partie B

Dans cette partie,  $f$  est toujours l'application de  $P^*$  vers  $P^*$  définie par (1). On note  $C$  le cercle de centre  $I$  et de rayon  $R$  avec  $R$  strictement positif,  $C^*$  ce cercle privé de ses points d'intersection éventuels avec  $\ell_0$ .

À Donner une équation cartésienne de  $C$  ainsi que celle de l'image de  $C^*$  par  $f$ .

· Montrer qu'il existe une unique valeur de  $R$  (à déterminer) telle que l'image de  $C^*$  par  $f$  est une parabole dont on donnera une équation, le foyer et la directrice.

· Déterminer l'ensemble des réels  $R$  strictement positifs tels que l'image de  $C^*$  par  $f$  est une ellipse dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers, et l'excentricité en fonction de  $R$ .

^ Déterminer l'ensemble des réels  $R$  strictement positifs tels que l'image de  $C^*$  par  $f$  est une hyperbole dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers, l'excentricité et les asymptotes en fonction de  $R$ .

~ Pour  $R > 1$  soient  $U$  et  $V$  les intersections de  $C$  avec  $\ell_0$ .  $T_U$  et  $T_V$  sont les tangentes à  $C$  en  $U$  et  $V$ . Les images par  $f$  de  $T_U^*$  et  $T_V^*$  sont incluses dans les droites  $T_U$  et  $T_V$ . Montrer que  $T_U$  et  $T_V$  sont les asymptotes de l'image de  $C^*$  par  $f$ .