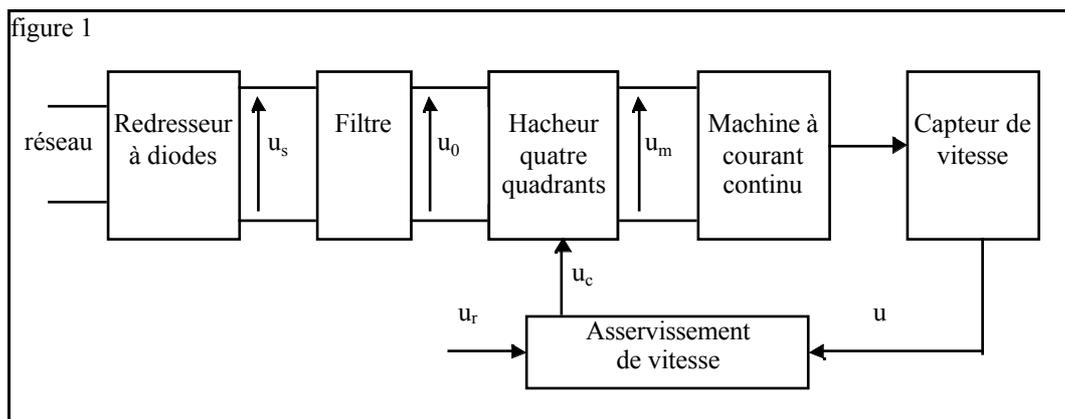


Etude d'un asservissement de vitesse

Recommandation : l'énoncé est relativement long et il est vivement conseillé de le lire complètement avant de débiter. Les réponses à de nombreuses questions sont très simples et ne nécessitent aucun calcul.

Présentation générale.

Un asservissement de vitesse est réalisé en utilisant une machine à courant continu pilotée par un hacheur quatre quadrants. La figure 1 présente l'ensemble du dispositif où ω désigne la vitesse angulaire de rotation (en rd/s).



Le problème se décompose en quatre parties indépendantes et d'inégales longueurs et difficultés :

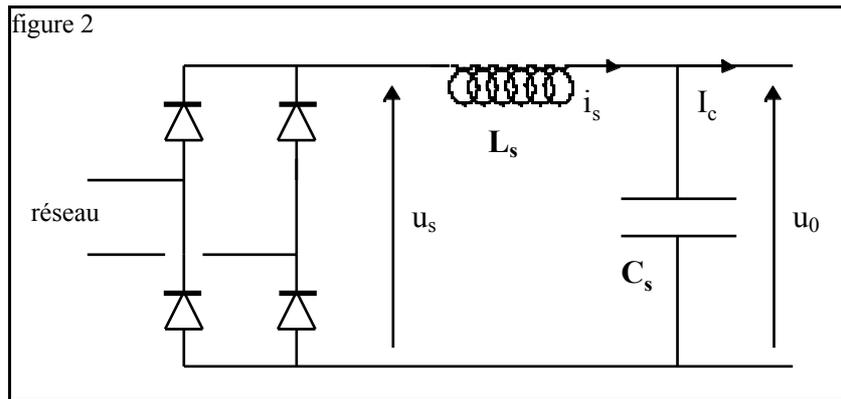
- I. alimentation du hacheur,
- II. étude du hacheur,
- III. étude de la réversibilité,
- IV. asservissement de la vitesse.

Remarque préliminaire : la valeur moyenne de la tension aux bornes d'une bobine, alimentée en régime permanent périodique, est toujours nulle.

I. Alimentation du hacheur.

Cette alimentation est réalisée à partir du réseau monophasé de fréquence f_r et de valeur efficace U_r au moyen d'un pont de diodes et d'un filtre du second ordre composé d'une bobine d'inductance L_s et d'un condensateur de capacité C_s . La figure 2 suivante précise les notations utilisées où le courant I_c « sortant » de ce filtre est supposé constant.

On supposera la conduction du pont continue, le courant i_s ne s'annulant jamais.



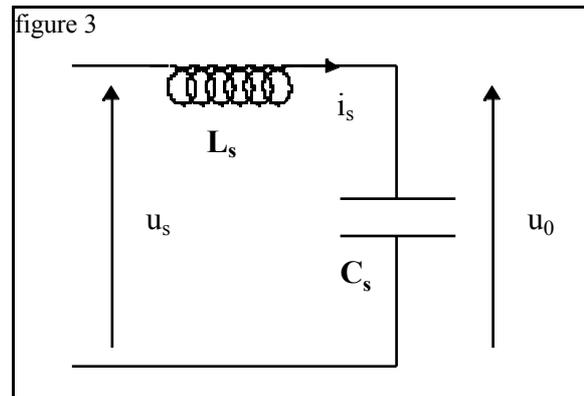
On donne les valeurs numériques suivantes : $f_r = 50 \text{ Hz}$ et $U_r = 230 \text{ V}$.

- I.1. Calcul des valeurs moyennes.
 - I.1.a. Tracer l'allure de la tension u_s .
 - I.1.b. Déterminer l'expression littérale de la valeur moyenne de u_s , notée U_s . Calculer la valeur numérique de cette tension U_s .
 - I.1.c. En déduire la valeur moyenne U_0 de la tension u_0 .

La tension u_s peut s'écrire : $u_s = U_s + u_s$, u_s représentant l'ondulation de la tension u_s . On suppose que cette ondulation de tension est sinusoïdale, de la forme : $u_s = u_s \sin(\omega_s t)$. Les autres grandeurs du schéma s'écrivent alors :

$$u_0 = U_0 + u_0 \quad \text{et} \quad i_s = I_s + i_s$$

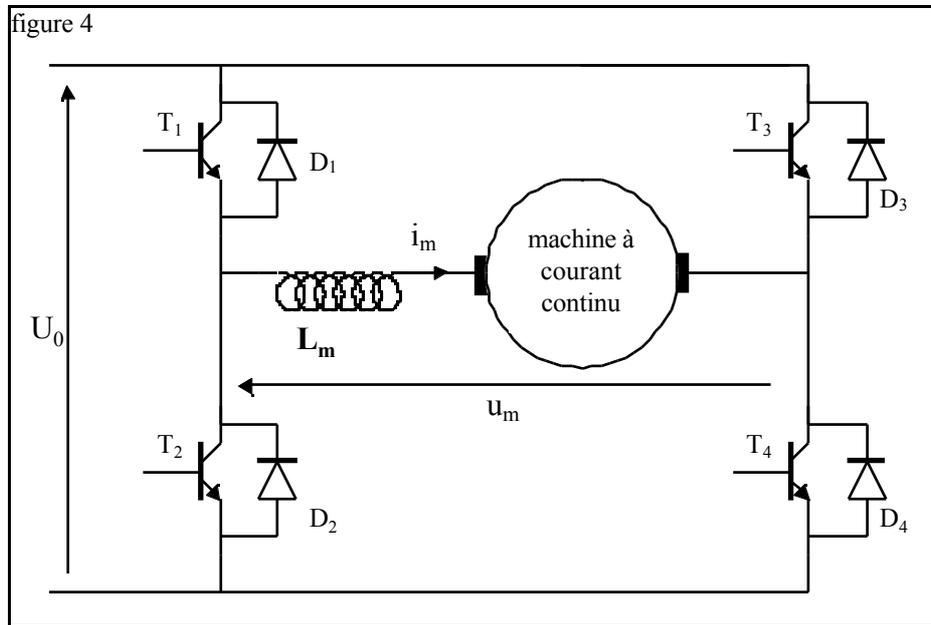
Pour déterminer les valeurs de L_s et C_s , on ne s'intéresse qu'à la variation sinusoïdale des grandeurs u_s , u_0 et i_s notées u_s , u_0 et i_s . Pour cela, on dresse le schéma équivalent pour ce comportement comme indiqué sur la figure 3 ci-contre.



- I.2. On utilise la notation complexe suivante : \underline{U}_s , \underline{U}_0 et \underline{I}_s pour représenter respectivement u_s , u_0 et i_s .
 - I.2.a. Déterminer l'expression de u_s en fonction de U_r . Calculer la valeur numérique de u_s .
 - I.2.b. Déterminer l'expression de la pulsation ω_s en fonction de f_r . Calculer numériquement ω_s .
 - I.2.c. Déterminer l'expression de \underline{U}_0 en fonction de \underline{U}_s et de L_s , C_s et ω_s .
 - I.2.d. Déterminer l'expression de \underline{I}_s en fonction de \underline{U}_s et de L_s , C_s et ω_s .
- I.3. Afin d'obtenir un bon filtrage, on impose une ondulation maximale de la tension u_0 de 10%, ce qui signifie que l'amplitude « crête à crête » de l'ondulation u_0 reste inférieure à 10% de la valeur moyenne U_0 . De plus, afin de maintenir une conduction continue du pont de diodes, on limite l'amplitude « crête à crête » de l'ondulation i_s du courant i_s à I_{\max} (on prendra : $I_{\max} = 1 \text{ A}$).
 - I.3.a. Traduire les hypothèses précédentes par deux inégalités reliant les éléments du filtre L_s et C_s à ω_s , U_0 et I_{\max} .
 - I.3.b. En déduire les valeurs numériques minimales à donner à L_s et C_s .

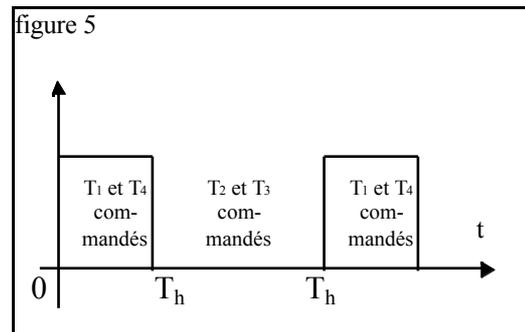
II. Etude du hacheur.

Le hacheur quatre quadrants est constitué de quatre transistors et de quatre diodes comme l'indique la figure 4 suivante. Les semi-conducteurs sont supposés idéaux. Lorsqu'ils conduisent, ils sont assimilés à des courts-circuits et lorsqu'ils sont bloqués, ils sont équivalents à des circuits ouverts.



Les signaux de commande des transistors sont « rectangulaires », de fréquence f_h (la période étant $T_h = 1 / f_h$) et de rapport cyclique α . Ce rapport cyclique est défini sur la figure 5. La commande est de type complémentaire et totale, les transistors T_1 et T_4 étant pilotés simultanément, les transistors T_2 et T_3 l'étant également.

La figure 5 ci-contre présente la chronologie de ces commandes.



Lorsque T_1 et T_4 sont commandés pour conduire, T_2 et T_3 sont maintenus bloqués. Puis, lorsque T_1 et T_4 sont bloqués, T_2 et T_3 sont commandés pour conduire.

Dans cette partie, on suppose que la tension d'alimentation du hacheur est strictement constante, assimilée à U_0 . La machine à courant continu est modélisée par un dipôle de résistance R et de force électromotrice E . On rappelle que cette f.e.m. est proportionnelle à la vitesse de rotation : $E = k \cdot \omega$ (ω désignant la vitesse de rotation en rd/s). Le couple électromagnétique de cette machine τ_m est alors proportionnel au courant moyen dans le moteur : $\tau_m = k \cdot I_m$. Ce courant moyen I_m est la valeur moyenne du courant i_m sur une période de découpage.

On donne les valeurs numériques suivantes : $U_0 = 210 \text{ V}$, $L_m = 3 \text{ mH}$, $f_h = 20 \text{ kHz}$, $k = 1,12 \text{ V.s.rd}^{-1}$.

II.1. Etude des formes d'onde sur une période de découpage. Dans cette question, on néglige la résistance R de l'induit de la machine.

- II.1.a. Sur l'intervalle de temps $[0, \alpha \cdot T_h]$, que vaut la tension u_m ? Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait le courant i_m sur cet intervalle en fonction de U_0 et E .
- II.1.b. Sur l'intervalle de temps $[\alpha \cdot T_h, T_h]$, que vaut la tension u_m ? Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait le courant i_m sur cet intervalle en fonction de U_0 et E .
- II.1.c. Tracer alors, sur une période de découpage, l'allure de $u_m(t)$ et $i_m(t)$.
- II.1.d. Calculer la valeur moyenne U_m de u_m sur une période T_h en fonction de α et de U_0 .

- II.1.e. La vitesse de la machine étant supposée constante sur une période T_h , déterminer l'expression de la f.e.m. E en fonction de U_m .
- II.1.f. Déterminer l'amplitude « crête à crête » du courant i_m , notée I_m , sur une période de découpage en fonction de U_0 , L_m et f_h .
- II.1.g. Pour $\alpha = 0,75$, calculer numériquement U_m , E et I_m .
- II.2. Tracé des courbes pour $\alpha = 0,75$ (la résistance de la machine étant toujours négligée).
- II.2.a. Tracer l'allure de la tension u_m sur deux périodes T_h .
- II.2.b. Tracer ensuite, sur le même graphe, l'allure du courant i_m sur deux périodes T_h lorsque ce courant i_m a une valeur moyenne positive supérieure à I_m .
- II.2.c. Préciser, sous le tracé précédent, quels sont les semi-conducteurs réellement parcourus par un courant sur les intervalles de temps $[0, \alpha T_h]$ et $[\alpha T_h, T_h]$.
- II.2.d. Si le courant i_m avait une autre valeur moyenne (positive ou négative), comment seraient modifiés les deux graphes précédents ? Répondre sans faire aucun autre tracé.
- II.3. Caractéristiques de sorties : on tient compte de la résistance d'induit R de la machine ($R = 1 \Omega$).
- II.3.a. Sur une période de découpage T_h , déterminer l'équation liant les valeurs moyennes U_m et I_m des grandeurs u_m et i_m en fonction de R et de E , f.e.m. du moteur supposée constante.
- II.3.b. En déduire la caractéristique mécanique $T_m(\omega)$ en fonction de R , k , U_0 et α .
- II.3.c. Tracé ce réseau de caractéristiques pour les cinq valeurs suivantes du rapport cyclique α : $0 - 0,25 - 0,5 - 0,75 - 1$.
- II.3.d. Tracé sur le réseau précédent la caractéristique de la charge mécanique entraînée, assimilée à un frottement visqueux de constante f : $T_{ch} = f \cdot \omega$ (on prendra $f = 0,24 \text{ N.m.s.rd}^{-1}$).
- II.3.e. Quelle est la vitesse maximale ω_{\max} de la machine entraînant cette charge mécanique ?
- II.3.f. Quelle est la valeur de rapport cyclique permettant l'arrêt de la machine ainsi chargée ?

III. Réversibilité du dispositif.

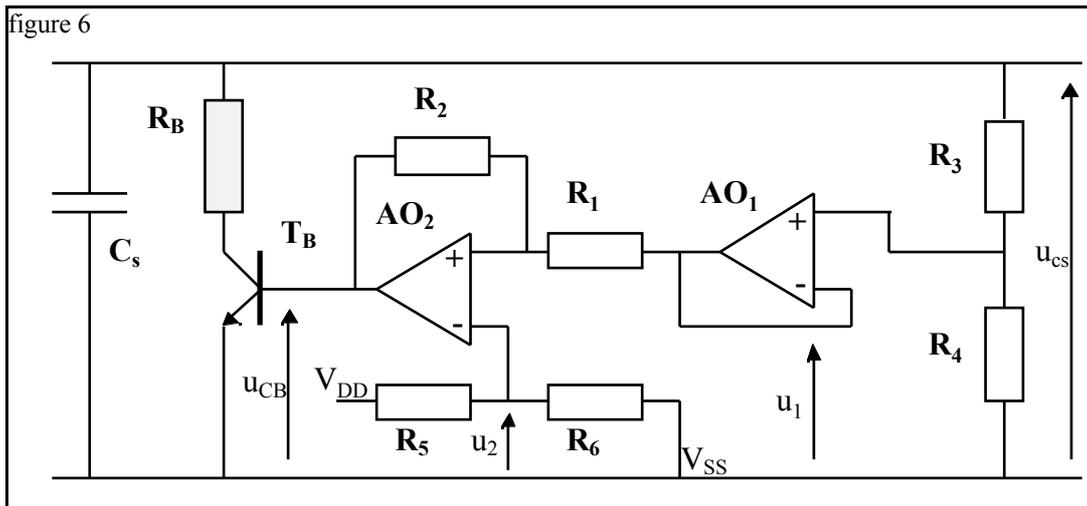
La machine à courant continu est intrinsèquement réversible, fonctionnant en moteur si le couple et la vitesse sont de même signe, en génératrice si couple et vitesse sont de signes contraires. Le hacheur quatre quadrants est lui aussi réversible car la valeur moyenne de la tension u_m peut être positive ou négative suivant le rapport cyclique imposé, ceci quel que soit le signe de la valeur moyenne du courant i_m .

On étudie le ralentissement de la machine, depuis sa vitesse nominale ω_n (ou $N_n = 1500 \text{ tr/mn}$) jusqu'à l'arrêt. Le moment d'inertie de la partie tournante est noté J ($J = 2,2 \text{ kg.m}^2$).

On donne les valeurs numériques suivantes : $C_s = 100 \mu\text{F}$, $U_0 = 210 \text{ V}$.

- III.1. Calculer ω_n .
- III.2. Le redresseur à diodes est-il réversible ? Pourquoi ?
- III.3. Lors du ralentissement, quelle est la variation de l'énergie cinétique W_c de la machine ? Calculer sa valeur numérique.
- III.4. On suppose que 50% de l'énergie correspondante est renvoyée vers le condensateur C_s . Lorsque la vitesse de la machine est ω_n , la tension u_{cs} à ses bornes est U_0 . Quelle serait sa valeur finale U_f à l'arrêt de la machine ? Calculer numériquement cette valeur U_f .

Afin d'éviter un claquage de l'isolant du condensateur, on ajoute en parallèle un dispositif « Ballast » constitué d'un transistor T_B (supposé idéal) et d'une résistance R_B comme l'indique la figure 6 suivante.



La commande du transistor est réalisée grâce aux amplificateurs AO₁ et AO₂: lorsque la tension u_{CB} est positive, T_B est passant (assimilé à un court-circuit) ; lorsque la tension u_{CB} est nulle, T_B est bloqué (assimilé à un circuit ouvert). Les amplificateurs opérationnels sont alimentés entre les tensions V_{SS} et V_{DD} (V_{SS} est également le potentiel de référence du montage et l'on suppose donc : $V_{SS} = 0$ V).

III.5. Quel est le type de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel AO₁? Quel est son rôle ?

III.6. Afin d'obtenir en permanence $u_1 = u_{CS}/100$, proposer des valeurs pour R₃ et R₄ sachant que ces résistances sont de puissance maximale 0,5 Watt.

Par définition, lorsque l'amplificateur opérationnel AO₂ est « saturé », sa tension de sortie est égale à V_{DD} si la différence de potentiel $V_+ - V_-$ est positive ; par contre, sa tension de sortie est égale à V_{SS} si la différence de potentiel $V_+ - V_-$ est négative. V_+ et V_- représentent respectivement les potentiels des entrées « + » et « - » par rapport à V_{SS} . On prendra : $V_{DD} = 12$ V, l'amplificateur opérationnel AO₂ ne fonctionnant pas en régime linéaire.

III.7. On suppose $u_{CB} = V_{SS}$, l'amplificateur AO₂ étant saturé.

III.7.a. Déterminer l'expression de $V_+ - V_-$ en fonction de u_1 et u_2 .

III.7.b. En déduire, en fonction de u_2 , la valeur maximale u_{1M} de u_1 permettant de conserver $u_{CB} = V_{SS}$.

III.8. La tension u_1 étant supérieure à u_{1M} , l'amplificateur est toujours saturé mais sa tension de sortie vaut maintenant : $u_{CB} = V_{DD}$. On suppose alors que la tension u_1 diminue.

III.8.a. Déterminer l'expression de $V_+ - V_-$ en fonction de u_1 et u_2 .

III.8.b. En déduire, en fonction de u_2 et V_{DD} la valeur minimale u_{1m} de u_1 pour laquelle $u_{CB} = V_{DD}$.

III.9. A partir des deux questions précédentes, tracer l'allure de la caractéristique de transfert donnant la valeur de u_{CB} en fonction de u_1 . Cette caractéristique fera apparaître les deux tensions u_{1m} et u_{1M} et l'on aura soin d'orienter les différents segments de cette caractéristique suivant le sens possible.

III.10. On souhaite la « mise en route » du Ballast dès que la tension u_{CS} atteint $1,2.U_0$ et qu'il soit « hors circuit » lorsque la même tension u_{CS} redescend à U_0 .

III.10.a. Déduire des questions précédentes la valeur numérique du rapport des résistances R_1/R_2 .

III.10.b. Déduire également la valeur numérique du rapport des résistances R_5/R_6 .

III.10.c. Proposer des valeurs pour ces quatre résistances R₁, R₂, R₅ et R₆ sachant que ces quatre résistances sont de puissance maximale 0,5 Watt.

IV. Asservissement de la vitesse.

Cet asservissement est réalisé de façon analogique au moyen d'amplificateurs opérationnels. On se référera à la figure 1 pour la signification des différents signaux.

Le capteur de vitesse délivre une tension u proportionnelle à la vitesse de rotation : $u = k \cdot \omega$.

Le rapport cyclique de commande du hacheur dépend linéairement d'une tension u_c : $\alpha = 0,5 + k \cdot u_c$. On suppose que la tension alimentant le moteur, représentée par sa transformée de Laplace $U_m(p)$, dépend de la

tension de commande u_c , de transformée de Laplace $U_c(p)$, par une fonction de transfert du premier ordre s'écrivant :

$$H_c(p) = \frac{U_m(p)}{U_c(p)} = \frac{k_c}{1 + \tau_c \cdot p}$$

La machine à courant continu pilotée par sa tension d'induit est assimilée à un système du premier ordre dont la fonction de transfert s'écrit :

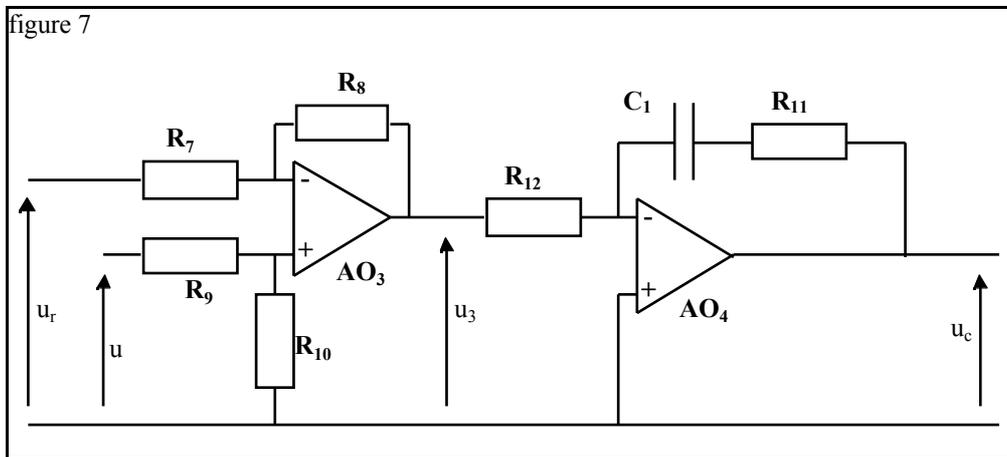
$$H_m(p) = \frac{U(p)}{U_m(p)} = \frac{k_m}{1 + \tau_m \cdot p}$$

On donne les valeurs numériques suivantes :

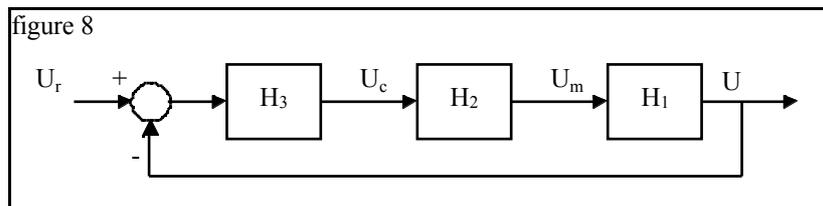
$$k = 0,07 \text{ V.s.rd}^{-1} ; k_c = 32 ; k_m = 2 \text{ rd.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1} ; \tau_m = 0,012 \text{ s}, \tau_c = 0,05 \text{ ms.}$$

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux variations des grandeurs U_m , u_c , u_r et u , variations représentées par leur transformée de Laplace notées respectivement $U_m(p)$, $U_c(p)$, $U_r(p)$ et $U(p)$. La tension u_r représente la consigne de l'asservissement.

Ces différentes grandeurs sont utilisées pour réaliser le montage de la figure 7. Les deux amplificateurs opérationnels sont supposés fonctionner en régime linéaire. Ils sont alimentés entre $+V_{DD}$ et $-V_{DD}$.



- IV.1. Déterminer l'expression donnant la tension u_3 en fonction de u_r et u .
- IV.2. Déterminer la relation entre $U_3(p)$ et $U_c(p)$, transformées de Laplace des tensions u_3 et u_c .
- IV.3. Montrer que l'on peut alors mettre cet asservissement sous la forme d'un schéma-bloc de la forme de la figure 8 suivante (les grandeurs figurant étant les transformées de Laplace, de variable « p »).



Pour cela :

- IV.3.a. Déterminer les deux relations liant R_9 et R_{10} , d'une part, R_7 et R_8 , d'autre part.
- IV.3.b. Déterminer le contenu des blocs H_1 et H_2 en fonction de k , k_c , k_m , τ_c et τ_m .
- IV.3.c. On pose $k_i = R_{11} \cdot C_1$ et $k_i = \frac{R_{12}}{R_{11}}$. Déterminer le contenu du bloc H_3 en fonction de k_i et k_i .

IV.4. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de cet asservissement : $H_{BO}(p) = \frac{U(p)}{U_r(p)}$ en fonction de k , k_c , k_m , k_i , τ_c , τ_m et de la variable p .

- IV.5. Dans la suite, on pose $A = \frac{k_c \cdot k_i \cdot k_m}{k_i}$. On souhaite obtenir une compensation du plus petit pôle de la fonction de transfert $H_{Bo}(p)$ (sa plus grande « constante de temps ») par le terme introduit au numérateur par le montage décrit à la figure 7 (méthode de compensation du « pôle dominant »).
- IV.5.a. En déduire la relation entre τ_i et τ_m (**relation supposée vérifiée dans la suite du problème**).
- IV.5.b. Ré-écrire la fonction de transfert $H_{Bo}(p)$ en fonction uniquement de A , τ_m et τ_c .
- IV.6. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{U(p)}{U_r(p)}$ toujours uniquement en fonction de A , τ_m et τ_c .
- IV.7. Mettre cette fonction de transfert $H_{BF}(p)$ sous la forme suivante : $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + 2 \cdot m \cdot \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$.
- IV.7.a. Déterminer l'expression de la pulsation ω_0 en fonction de A , τ_m et τ_c .
- IV.7.b. Déterminer l'expression du coefficient d'amortissement m en fonction de A , τ_m et τ_c .
- IV.8. Calcul des paramètres de réglage :
- IV.8.a. Déterminer la relation entre A , τ_m et τ_c afin d'obtenir un coefficient d'amortissement $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- IV.8.b. Quel est l'intérêt de choisir cette valeur particulière pour m ?
- IV.8.c. Quelle est alors l'expression particulière de la pulsation ω_0 ? Calculer numériquement ω_0 .
- IV.8.d. Déduire des relations précédentes les expressions des paramètres de réglage k_i et τ_i en fonction des constantes k , k_c , k_m , τ_c et τ_m . Calculer numériquement k_i et τ_i .
- IV.9. Proposer des valeurs « réalistes » pour les composants du montage de la figure 7 sachant que les résistances sont de puissance maximale 0,5 Watt.